



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

CENTRO DE TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

**TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO**

**CÁLCULO DE PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DE SEÇÕES DE  
PAREDES FINAS ABERTAS, FECHADAS E MISTAS**

BRUNO CAVALCANTI DE OLIVEIRA

MATRÍCULA: 11211437

João Pessoa – PB

25 de maio de 2017

BRUNO CAVALCANTI DE OLIVEIRA

**CÁLCULO DE PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DE SEÇÕES DE  
PAREDES FINAS ABERTAS, FECHADAS E MISTAS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal da Paraíba (UFPB), Campus João Pessoa, em cumprimento às exigências do curso para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Civil.

**Orientador:** Prof. Ângelo Vieira Mendonça, DSc.

João Pessoa – PB

25 de maio de 2017

O4c1 Oliveira, Bruno Cavalcanti de

Cálculo de propriedades geométricas de seções de paredes finas abertas, fechadas e mistas. /Bruno Cavalcanti de Oliveira – João Pessoa, 2017.

79f. il.:

Orientador: Prof. Dr. Ângelo Vieira Mendonça

Monografia (Curso de Graduação em Engenharia Civil) Campus I -  
UFPB / Universidade Federal da Paraíba.

**FOLHA DE APROVAÇÃO**

**BRUNO CAVALCANTI DE OLIVEIRA**

**CÁLCULO DE PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DE SEÇÕES I  
PAREDES FINAS ABERTAS, FECHADAS E MISTAS**

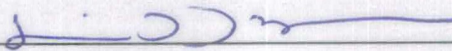
Data da aprovação: 02/06/2017

Banca examinadora:



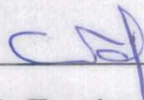
**Prof. Ângelo Vieira Mendonça, DSc. (Orientador)**

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental CT/UFPB



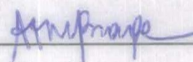
**Prof. Givanildo Alves de Azevedo, DSc. (Examinador Interno)**

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental CT/UFPB



**Prof. Carlos Antônio Taurino De Lucena, MSc. (Examinador Interno)**

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental CT/UFPB



**Ana Cláudia Fernandes Medeiros Braga**

Coordenadora do Curso de Engenharia Civil/UFPB

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente a Deus, por ter guiado meus passos até aqui.

A minha família, pelo apoio que sempre me deram durante a longa jornada do curso.

A minha avó Antônia (in memorian), que tanto se orgulhava de mim. Seus cheiros, abraços e carinhos foram, sem dúvida alguma, o maior combustível para chegar até aqui.

A um amigo que conheci no ventre da minha mãe, Thiago Cavalcanti de Oliveira, meu irmão gêmeo, que compartilhou comigo todos momentos da minha vida.

Aos amigos do curso por terem trilhado junto comigo esse caminho.

A minha namorada, Andrezza, que nos últimos oito anos tem sido meu porto seguro.

Ao meu orientador, Ângelo Vieira, pelas orientações dadas, sem as quais esse trabalho não teria êxito.

OLIVEIRA, Bruno Cavalcanti. **Cálculo de propriedades geométricas de seções de paredes finas abertas, fechadas e mistas**. Trabalho de Conclusão de Curso. Graduação em Engenharia Civil – Universidade Federal da Paraíba. João Pessoa, 2017, 79 p.

## RESUMO

No presente trabalho foi desenvolvido um processo computacional para o cálculo direto de propriedades geométricas retangulares e setoriais de barras com seção transversal de paredes finas abertas, fechadas e mistas a partir de um sistema de eixos com origem em um ponto qualquer da seção. O programa desenvolvido foi codificado no Mathcad, software de matemática e engenharia, possibilitando o cálculo para um conjunto de paredes retas e/ou circulares. A seção transversal é discretizada por nós e segmentos retos e/ou curvos, onde a espessura deve ser constante em cada segmento. Alguns exemplos numéricos são feitos e comparados com os resultados encontrados na literatura. A fim de verificar o cálculo proposto para paredes curvas, um exemplo mostra a convergência dos resultados quando a parede curva é discretizada em vários segmentos retos.

**Palavras chave:** Paredes finas; Propriedades setoriais; Programação; flexo torção;

OLIVEIRA, Bruno Cavalcanti. **Calculation geometrical properties of thin-walled sections open, closed and mixed**. Graduation Final Project. Graduation in Civil Engineering - Federal University of Paraíba. João Pessoa, 2017, 79 p.

### ABSTRACT

In the present work a computational technique was developed for the direct calculation of rectangular and sectoral geometric properties of open, closed and mixed thin-walled cross-section beams from a reference system placed at any point in the plane of the cross-section.. The program developed was coded in Mathcad, mathematics and engineering software, producing an evaluation of a set of straight and/or circular walls. The cross section is shaped by nodes and straight and / or curved segments, and the thickness must be constant in each segment. Some numerical examples are done and compared with the results found in the literature. In order to verify the proposed calculation for curved walls, an example shows the convergence of results when curved wall is discretized into several straight segments.

**Keywords:** Thin-walled; Properties sectorial; Programming; Torsional; Flexural;

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Viga de aço com seção transversal de paredes finas.....	13
Figura 1.2 – Viga de concreto da ponte Rio-Niterói com seção transversal de paredes finas..	14
Figura 2.1 – Sistemas de eixos.....	17
Figura 2.2 – Seção genérica de paredes finas.....	20
Figura 2.3 – Definição da área setorial.....	23
Figura 2.4 – Vetores unitários dos eixos.....	24
Figura 2.5 – Artificio matemático para a obtenção da posição do centro de torção.....	24
Figura 2.6 – Fluxos de cisalhamento em seção multicelular.....	29
Figura 3.1 – Fluxograma geral do processo computacional.....	33
Figura 3.2 – Segmento reto da seção transversal.....	34
Figura 3.3 – Segmento circular da seção transversal.....	35
Figura 3.4 – Representação de segmento circular.....	38
Figura 3.5 – Equações de x e y em cada quadrante para um segmento curvo orientado no sentido anti-horário.....	39
Figura 3.6 – Equações de x e y em cada quadrante para um segmento curvo orientado no sentido horário.....	39
Figura 4.1 – Seção mista com cortes hipotéticos.....	50
Figura 4.2 – Croqui da seção exemplo da figura 4.1.....	51
Figura 4.3 – Inserção das coordenadas do pólo provisório A.....	52
Figura 4.4 – Inserção do número de segmentos e células.....	52
Figura 4.5 – Inserção das coordenadas dos nós.....	52
Figura 4.6 – Inserção das características de cada segmento.....	53
Figura 4.7 – Entrada de dados para a seção exemplo da figura 4.1.....	54
Figura 5.1 – Seção aberta de paredes finas em formato de "u".....	55
Figura 5.2 – Seção aberta de paredes finas em formato de "s".....	56
Figura 5.3 – Seção aberta de paredes finas.....	57
Figura 5.4 – Seção aberta de paredes finas.....	58
Figura 5.5 – Seção fechada multicelular de paredes finas.....	59
Figura 5.6 – Seção mista de paredes finas.....	60
Figura 5.7 – Seção mista de paredes finas.....	61
Figura 5.8 – Seção mista de paredes finas.....	62



Figura 5.9 – Seção aberta de paredes finas.....	63
Figura 5.10 – Seção mista multicelular de paredes finas.....	64
Figura 5.11 – Seção aberta de paredes finas em formato de “I” assimétrico.....	65
Figura 5.12 – Seção aberta em formato de “U” com segmentos curvos.....	66
Figura 5.13 – Seção aberta com segmento curvo.....	67
Figura 5.14 – Seção fechada com trechos circular e reto.....	68
Figura 5.15 – Seção circular aberta.....	69
Figura 5.16 – Seção aberta com segmentos curvos e retos.....	70
Figura 5.17 – Seção mista com segmentos curvos e retos.....	71
Figura 5.18 – Seção mista com segmentos curvos e retos.....	72
Figura 5.19 – Seção multicelular com trechos retos e curvos.....	73
Figura 5.20 – Seção aberta com segmentos retos e curvos.....	74
Figura 5.21 – Seção multicelular com segmentos retos e curvos.....	75

## LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1 - Propriedades da figura 5.1 calculadas pelo autor e pela referência.....	55
Tabela 5.2 - Propriedades da figura 5.2 calculadas pelo autor e pela referência.....	56
Tabela 5.3 - Propriedades da figura 5.3 calculadas pelo autor e pela referência.....	57
Tabela 5.4 - Propriedades da figura 5.4 calculadas pelo autor e pela referência.....	58
Tabela 5.5 - Propriedades da figura 5.5 calculadas pelo autor e pela referência.....	59
Tabela 5.6 - Propriedades da figura 5.6 calculadas pelo autor e pela referência.....	60
Tabela 5.7 - Propriedades da figura 5.7 calculadas pelo autor e pela referência.....	61
Tabela 5.8 - Propriedades da figura 5.8 calculadas pelo autor e pela referência.....	62
Tabela 5.9 - Propriedades da figura 5.9 calculadas pelo autor e pela referência.....	63
Tabela 5.10 - Propriedades da figura 5.10 calculadas pelo autor e pela referência.....	64
Tabela 5.11 - Propriedades da figura 5.11 calculadas pelo autor e pela referência.....	65
Tabela 5.12 - Propriedades da figura 5.12 calculadas pelo autor e pela referência.....	66
Tabela 5.13 - Propriedades da figura 5.13 calculadas pelo autor e pela referência.....	67
Tabela 5.14 - Propriedades da figura 5.14 calculadas pelo autor.....	68
Tabela 5.15 - Propriedades da figura 5.15 calculadas pelo autor e pela referência.....	69
Tabela 5.16 - Propriedades da figura 5.16 calculadas pelo autor e pela referência.....	70
Tabela 5.17 - Propriedades da figura 5.17 calculadas pelo autor.....	71
Tabela 5.18 - Propriedades da figura 5.18 calculadas pelo autor.....	72
Tabela 5.19 - Propriedades da figura 5.19 calculadas pelo autor.....	73
Tabela 5.20 - Propriedades da figura 5.20 calculadas pelo autor.....	74
Tabela 5.21 - Propriedades da figura 5.21 calculadas pelo autor.....	75

## LISTA DE NOTAÇÕES

$A$  - Área da seção.

$a$  - Área do segmento.

$E$  - Módulo de elasticidades longitudinal.

$G$  - módulo de cisalhamento.

$h$  - distância entre um pólo e a tangente da linha central do segmento.

$h_A$  - distância entre o pólo provisório A e a tangente da linha central do segmento.

$h_D$  - distância entre o centro de torção D e a tangente da linha central do segmento.

$I_h$  - Constante seccional.

$I_{h_A}$  - Constante seccional no pólo provisório.

$I_x, I_y$  - Momentos de inércia.

$I_{xy}$  - Produto de inércia.

$I_{x\omega}, I_{y\omega}$  - Produtos de inércia setoriais principais.

$I_\omega$  - Momento de inércia setorial principal ou Constante de empenamento

$J$  - Momento de inércia à torção ou Constante torcional.

$L$  - comprimento da seção.

$l$  - comprimento do segmento.

$m$  - torque.

$m_A$  - torque agindo ao longo do eixo longitudinal que contem o pólo provisório A.

$m_D$  - torque agindo ao longo do eixo longitudinal que contem o centro de torção D.

$m_\omega$  - Bimomento.

$n, s$  - coordenadas normal e tangente a linha central do segmento.

$p_x, p_y$  - carregamentos distribuídos transversais nas direções x e y, respectivamente.

$p_z$  - carregamento distribuído axial.

$q$  - Fluxo de tensões de cisalhamento.

$Q_x, Q_y$  - Momentos estáticos

$Q_\omega$  - Momento estático setorial principal.

$Q_{\omega_A}, I_{x\omega_A}, I_{y\omega_A}, I_{\omega_A}$  - Propriedades setoriais no pólo provisório.

$R$  - Raio do arco de circunferência.

$t$  - espessura o segmento ou parede.

$u$  - Descolamentos na direção  $x$

$v$  - Deslocamento na direção  $y$

$w$  - Deslocamento longitudinal

$V$  - Esforço cortante.

$x, y, z$  - Coordenadas cartesianas

$x_A, y_A$  - coordenadas do pólo provisório

$x_C, y_C$  - coordenadas do centroide

$x_D, y_D$  - coordenadas do centro de torção

$x_i, y_i$  - coordenadas do nó inicial do segmento.

$x_j, y_j$  - coordenadas do nó final do segmento.

$x_o, y_o$  - coordenadas do centro de curvatura.

$\alpha$  - Ângulo do arco de circunferência.

$\theta$  - Ângulo do segmento em relação ao eixo  $x$ .

$\tau$  - Tensão de cisalhamento.

$\Phi$  - Ângulo de torção.

$\omega$  - Área setorial.

$\omega_A$  - Área setorial através do pólo provisório.

$\omega_D$  - Área setorial através do centro de torção.

$\bar{\omega}_D$  - Área setorial principal.

$\Omega$  - área setorial calculada para uma célula isolada

# SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO</b> .....	13
1.1. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	13
1.2. OBJETIVOS .....	15
1.2.1. Objetivo geral.....	15
1.2.2. Objetivos específicos.....	16
1.3. ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO .....	16
<b>2. PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DA SEÇÃO TRANSVERSAL</b> .....	17
2.1. CONDIÇÕES PARA O CENTROIDE.....	18
2.2. CONDIÇÕES PARA O CENTRO DE TORÇÃO.....	18
2.3. PROPRIEDADES SETORIAIS.....	22
2.3.1. Seções abertas .....	22
2.3.2. Seções fechadas e multicelulares .....	29
2.4. PROBLEMAS ENVOLVENDO PROPRIEDADES RETANGULARES E SETORIAIS ..	30
<b>3. PROCESSO NUMÉRICO COMPUTACIONAL</b> .....	32
3.1. CONFIGURAÇÃO GEOMÉTRICA DO IÉSIMO SEGMENTO.....	34
3.2. PROPRIEDADES RETANGULARES DO IÉSIMO SEGMENTO .....	35
3.2.1. Segmentos retos.....	35
3.2.2. Segmentos curvos.....	37
3.3. PROPRIEDADES RETANGULARES DA SEÇÃO.....	40
3.4. PROPRIEDADES SETORIAIS NO PÓLO PROVISÓRIO.....	41
3.4.1. Área setorial para seções abertas.....	42
3.4.2. Área setorial para seções fechadas .....	42
3.4.3. Momento estático, Momento de inércia e Produtos de inércia setoriais .....	44
3.4.4. Constante seccional.....	46
3.4.5. Constante torcional.....	46
3.4.6. Centro de torção .....	47
3.5. PROPRIEDADES SETORIAIS PRINCIPAIS .....	47
<b>4. ENTRADA DE DADOS</b> .....	49
4.1. MODELAÇÃO DA SEÇÃO .....	49
4.2. ENTRADA DE DADOS.....	50
4.2.1. Coordenadas do pólo provisório.....	51
4.2.2. Número de segmentos e número de células .....	51

4.2.3.	Número dos nós e suas coordenadas .....	52
4.2.4.	Características dos segmentos .....	53
<b>5.</b>	<b>EXEMPLOS</b> .....	<b>55</b>
<b>6.</b>	<b>CONCLUSÃO</b> .....	<b>77</b>
<b>7.</b>	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	<b>78</b>

## 1. INTRODUÇÃO

Com o avanço da tecnologia dos materiais, percebe-se uma tendência em reduzir o peso das estruturas através da utilização de elementos esbeltos na engenharia, o que fica mais evidenciado nos elementos de aço dotados de perfis com paredes cada vez mais finas. Devido à espessura de seus membros e da geometria da seção transversal, tais estruturas são susceptíveis a fenômenos de instabilidade e aos efeitos de flexo torção. Isto é, devido a não coincidência do centroide com o centro de torção, os efeitos de flexão não podem ser desacoplados dos efeitos de torção, requerendo, portanto, uma análise conjunta desses fenômenos, que são abordados nas teorias de flexo torção, tais como os modelos de Vlasov (1961), para perfis com seção aberta, e Bescoter (1954), para seções fechadas. Para a análise estrutural de barras de paredes finas é necessário a determinação de propriedades geométricas retangulares e setoriais, tais como: momentos de inércia, momentos estáticos, centroide, centro de torção, constante torcional, constante de empenamento, momento estático setorial, momentos setoriais e produtos setoriais. O cálculo manual de tais propriedades é tedioso e demorado. Assim, a elaboração de um processo computacional contribui para uma maior agilidade no dimensionamento dessas estruturas.

### 1.1. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Uma barra tem seção de paredes finas quando a espessura da parede for menor ou igual a 10% de uma dimensão característica da seção e quando essa dimensão característica for menor ou igual a 10% do comprimento da barra. Devido à espessura reduzida, essas estruturas são geralmente representadas pela sua linha central. (MORI; MUNAIAR NETO, 2009). Exemplos dessas estruturas são apresentados nas figuras a seguir.

Figura 1.1 – Viga de aço com seção transversal de paredes finas



Fonte: [www.metalfas.com.br](http://www.metalfas.com.br) (2017)

Figura 1.2 – Viga de concreto da ponte Rio-Niterói com seção transversal de paredes finas



Fonte: ecivilufes.wordpress.com (2017)

Na literatura, vários trabalhos foram desenvolvidos e processos computacionais apresentados para a determinação das propriedades geométricas de seções de paredes finas. Alguns trabalhos são descritos a seguir.

Hu (1992) desenvolveu um algoritmo para o cálculo de propriedades de elementos retilíneos de seções compostas por paredes finas abertas e fechadas. Seu trabalho consistiu em aprimorar um programa denominado SCRAP, desenvolvido no Estabelecimento de Pesquisa de Defesa Atlântica, cujos cálculos eram restritos a seções específicas. Estas não podiam ser arbitrariamente orientadas, pois resultava em erro do centro de torção. Vários exemplos são apresentados para verificar o procedimento que é válido para qualquer seção aberta ou fechada de paredes retas com espessura constante e independe de orientação da seção.

Em Alfano et al. (1994) é descrito um procedimento para a análise automática de seções multicelulares de paredes finas. Nele é explorada as principais características do algoritmo Depth-First-Search, de Tarjan (1972), com as seguintes propostas: análise multicelular, determinação do número de circuitos e localização dos cortes que tornam a seção aberta, promovendo uma simplificação da análise, uma vez que os dados de entrada necessários são apenas a numeração e as coordenadas dos vértices e a numeração e as espessuras das paredes. Um exemplo numérico, realizado para o casco de um navio por meios de um programa de computador implementado no software MATHEMATICA, mostra a eficácia da abordagem proposta. O programa desenvolvido é válido apenas para paredes retas e com espessuras constantes.

Edlund (1997) apresenta um estudo de seções de paredes finas arbitrárias e sua implementação em computador. Escrito na linguagem C, o programa é válido para seções



abertas, fechadas e mistas de paredes retas, podendo a espessura variar linear e simetricamente ao longo das paredes. O algoritmo Depth-First-Search, obtido de Alfano et al. (1994), é utilizado para a identificação de circuitos e introdução de cortes fictícios. Alguns exemplos numéricos são apresentados para validação do programa.

Um programa de computador para determinação de propriedades geométricas de vigas de paredes finas com perfil aberto foi desenvolvido por Prokic (1999). O programa é escrito em FORTRAN 77 e é válido apenas para paredes retas e com espessura constante. O número de dados de entrada é minimizado e não há regras a seguir na numeração conjunta e de elementos, o que simplifica aplicação do programa. Alguns exemplos numéricos são dados com informações completas sobre a entrada e saída.

Na continuação de seu trabalho, Prokic (2000) desenvolveu um programa de computador para determinação de propriedades geométricas de vigas de paredes finas com perfil aberto, fechado e misto. Para a análise de seções multicelulares, foi utilizado o algoritmo de R. Tarjan (1972) denominado Depth-First-Search, que identifica circuitos e introduz cortes nas seções fechadas, afim de que estas sejam consideradas como abertas, minimizando o número de dados de entrada. O programa é válido apenas para paredes retas e com espessuras constantes. Um exemplo de seção mista multicelular é apresentado para verificação do programa.

Xiang et al. (2002) apresenta um algoritmo computacional generalizado baseado na cadeia de linhas e modelos de árvores para o cálculo de propriedades de seções abertas de paredes finas. Dois programas em C++ para esses modelos são desenvolvidos. Exemplos numéricos são apresentados para verificação da abordagem. Fórmulas para a determinação das propriedades são apresentadas.

Nos trabalhos apresentados acima, as propriedades retangulares são calculadas no centroide ou transferidas para este antes do cálculo das propriedades setoriais e, para o cálculo de seções com parede circular, esta deve ser discretizada em segmentos retos para possibilitar um cálculo aproximado.

## 1.2. OBJETIVOS

### 1.2.1. Objetivo geral

Desenvolver um processo numérico computacional para o cálculo das propriedades geométricas retangulares e setoriais de seções de paredes finas abertas, fechadas e mistas.

### 1.2.2. Objetivos específicos

O presente trabalho possui dois objetivos específicos:

- 1) Possibilitar o cálculo das propriedades geométricas a partir de sistemas cartesianos genéricos e centro de rotação em um ponto qualquer da seção, sem a necessidade de transferir o sistema cartesiano para o centroide da seção.
- 2) Introduzir, no programa desenvolvido, o cálculo exato dessas propriedades para seções com paredes circulares.

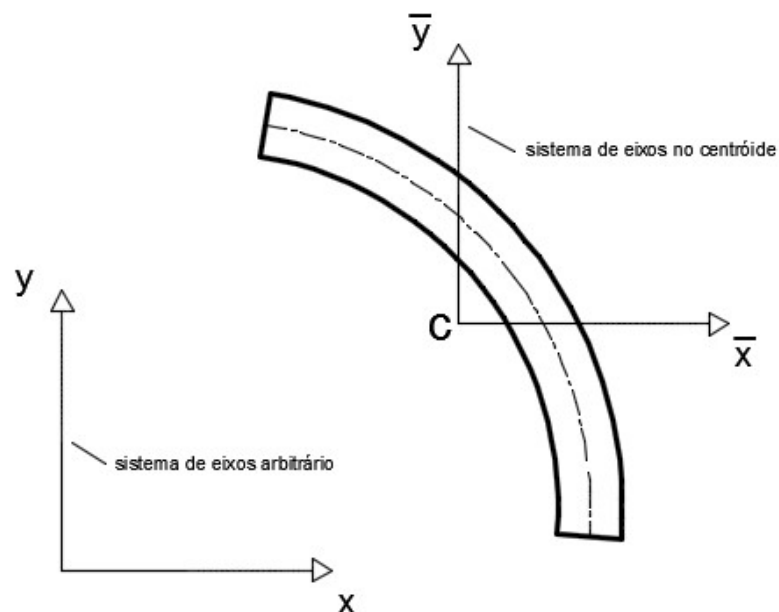
### 1.3. ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

No capítulo 2, apresenta-se a teoria acerca do assunto abordado. No capítulo 3 é apresentado um processo numérico com as expressões utilizadas no programa para a obtenção das propriedades. Tais expressões levam em conta que a seção é modelada por um conjunto de segmentos e nós. Instruções acerca da discretização da seção e da entrada de dados são apresentadas no capítulo 4, sendo necessário um conhecimento básico em Mathcad para possibilitar a utilização do programa. No capítulo 5 foram calculados diversos exemplos encontrados na literatura para comparação e validação dos resultados. Também foram elaborados alguns exemplos com segmentos circulares. Um exemplo mostra a convergência dos resultados quando um segmento circular é discretizado em vários segmentos retos.

## 2. PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DA SEÇÃO TRANSVERSAL

No presente trabalho, as propriedades geométricas da seção transversal são calculadas para um sistema de eixos arbitrário, cuja origem é localizada em qualquer ponto do plano da seção, conforme figura 2.1. Na literatura, é usual a utilização do sistema de eixos com origem no centroide, pois implica na nulidade dos momentos estáticos da seção, simplificando as equações que levam à determinação do centro de torção e das propriedades setoriais principais. Com essa simplificação, a condição necessária e suficiente para a obtenção do centro de torção é que os produtos setoriais de inércia sejam iguais a zero. Porém, para um sistema de eixos cuja origem não coincide com o centroide, essa condição é necessária, mas não suficiente, como será demonstrado no tópico 2.2. Mori e Munaiar Neto (2009) apresentam a dedução das equações que levam às condições para a determinação do centro de torção utilizando a origem do sistema no centroide. Pilkey e Kitis (1996) também utilizaram essa posição na origem do sistema para simplificar os cálculos do centro de torção e das propriedades setoriais principais. Diferentemente da literatura, este trabalho busca seguir um caminho genérico para obtenção das propriedades setoriais de uma seção, calculando-as a partir de um sistema de eixos qualquer.

Figura 2.1 – Sistemas de eixos



Fonte: Produzido pelo autor

## 2.1. CONDIÇÕES PARA O CENTROIDE

O centroide é o ponto associado a uma forma geométrica. Nos casos em que essa forma geométrica representa uma seção homogênea de um corpo, então o centroide tem a mesma posição que o centro de massa. Quando não só o corpo é homogêneo, mas também um campo gravitacional constante atua sobre ele, então esse ponto coincide com o centro de gravidade (HIBBELER, 2011).

As coordenadas do centroide de uma seção  $(x_C, y_C)$  podem ser obtidas a partir das seguintes expressões:

$$x_C = \frac{Q_x}{A} \quad e \quad y_C = \frac{Q_y}{A} \quad 2.1a \quad e \quad 2.1b$$

Onde  $A$  representa a área da seção e  $Q_x$  e  $Q_y$  são os momentos estáticos, cujas expressões são utilizadas aqui como:

$$Q_x = \int_A x \, dA \quad e \quad Q_y = \int_A y \, dA \quad 2.2a \quad e \quad 2.2b$$

Para um sistema de eixos com origem no centroide, os momentos estáticos são nulos, resultando em  $x_C = y_C = 0$ .

## 2.2. CONDIÇÕES PARA O CENTRO DE TORÇÃO

O centro de torção é uma propriedade geométrica e se refere ao ponto da seção transversal, no qual a aplicação da resultante das cargas transversais não gera torção. O centro de torção pode estar contido ou não na região da seção.

Mori e Munaier Neto (2009) apresentaram um desenvolvimento para a obtenção das condições necessárias do centro de torção feito com base na teoria de Vlasov (1961), considerando um sistema de eixos com origem no centroide. Adiante será apresentado esse desenvolvimento para um sistema de eixos qualquer, obtendo resultados diferentes do autor supracitado, quanto às condições para o centro de torção.

Através dos conceitos de Resistência dos Materiais, a tensão de cisalhamento em uma barra fletida é dada por:

$$\tau = \frac{V \cdot Q}{t \cdot I} \quad 2.3$$

Onde  $V$  é o cortante,  $Q$  é o momento estático,  $t$  é a espessura e  $I$  é o momento de inércia. Sendo  $Q$  e  $I$  calculados em relação a um sistema de eixos qualquer.

Para a seção da figura 2.2, considerando um carregamento atuando na direção que coincide com o eixo  $x$ , passando pelo ponto  $D$ , temos que  $V = V_x$ ,  $I = I_x$  e  $Q = Q_x$ , onde o momento estático dada pela eq. (2.2a) pode ser reescrito como:

$$Q_x = \int_A x \, dA = \int_{s1}^s x t \, ds \quad 2.4$$

E o momento de inércia é dado por:

$$I_x = \int_A x^2 \, dA \quad 2.5$$

Com base na figura 2.2, tem-se que a força elementar resultante do cisalhamento é dada por:

$$dF = \tau dA = \tau t ds \quad 2.6$$

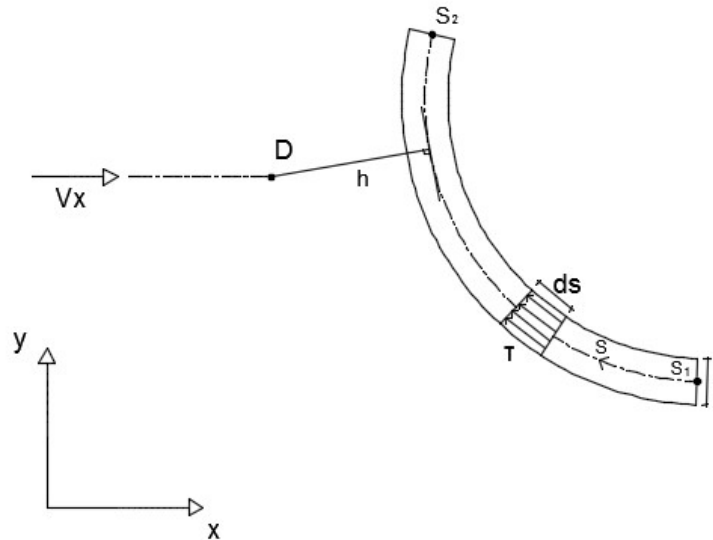
Conforme Mori e Munaiar Neto (2009), fazendo-se a integral em toda seção, de  $s1$  a  $s2$ , dos momentos das forças elementares e igualando a zero, tem-se a condição que permite encontrar o lugar geométrico da posição do centro de torção  $D$ , dada por:

$$\int_{s1}^{s2} \tau t ds \cdot h = 0 \quad 2.7$$

Onde  $h$ , como mostrado na figura 2.2, é a menor distância do ponto  $D$  à tangente da linha central da seção no ponto de interesse. Substituindo a eq. (2.3) na eq. (2.7), tem-se:

$$\int_{s_1}^{s_2} \frac{V_x \cdot Q_x}{t \cdot I_x} t ds \cdot h = 0 \quad 2.8$$

Figura 2.2 – Seção genérica de paredes finas



Fonte: produzido pelo autor

Na eq. (2.8), o momento de inércia e a força cortante são constantes e podem ser retirados da integral. Sabendo que a razão entre a força cortante e o momento de inércia resulta em um valor diferente de zero, tem-se que:

$$\int_{s_1}^{s_2} \left( \frac{1}{t} \int_{s_1}^s xt ds \right) t ds \cdot h = 0$$

Simplificando,

$$\int_{s_1}^{s_2} \left( \int_{s_1}^s xt ds \right) h ds = 0 \quad 2.9$$

A resolução da eq. (2.9) é obtida através da integração por partes. Resolvendo,

$$\int a db = ab - \int bda$$

Sendo,

$$a = \int_{s_1}^s xt ds \quad ; \quad da = xt ds$$

$$db = h ds \quad ; \quad b = \int_{s_1}^s h ds$$

Assim,

$$\left( \int_{s_1}^s xt ds \right) \cdot \left( \int_{s_1}^s h ds \right) - \int_{s_1}^{s_2} \left( \int_{s_1}^s h ds \right) \cdot xt ds = 0 \quad 2.10$$

Na eq. (2.10), o termo  $\int_{s_1}^s xt ds$  é referente ao momento estático  $Q_x$ , como definido na eq. (2.2a). O termo  $\int_{s_1}^s h ds$  é denominado área setorial, proposto por Vlasov (1961) e representado aqui pela letra  $\omega$ . Dessa forma, a condição para a determinação do centro de torção fica escrita como:

$$Q_x \cdot \omega_D - \int_A x \cdot \omega_D dA = 0 \quad 2.11$$

Onde  $\omega_D$  é a área setorial medida a partir do pólo D. Fazendo essa mesma análise para o eixo y, obtemos a segunda condição para a determinação do centro de torção, dada por:

$$Q_y \cdot \omega_D - \int_A y \cdot \omega_D dA = 0 \quad 2.12$$

Logo, as eq. (2.11) e (2.12) são as condições para o centro de torção, considerando um sistema de eixos com origem em qualquer ponto do plano da seção.

Os produtos setoriais de inércia são definidos como:

$$I_{x\omega} = \int_A x \cdot \omega dA \quad e \quad I_{y\omega} = \int_A y \cdot \omega dA \quad 2.13$$

. Dessa forma, as eq. (2.11) e (2.12) podem ser reescritas da seguinte forma:

$$Q_x \cdot \omega_D - I_{x\omega} = 0 \quad 2.14$$

$$Q_y \cdot \omega_D - I_{y\omega} = 0 \quad 2.15$$

Na literatura, como a origem do sistema coincide com o centroide, os momentos estáticos da seção são nulos, tornando as condições para o centro de torção apenas como  $I_{x\omega} = I_{y\omega} = 0$ . Neste trabalho não é utilizada esta simplificação, visto que a origem do sistema pode está localizada num ponto qualquer do plano da seção, logo as condições para o centro de torção utilizadas no programa serão as eq. (2.14) e (2.15).

### 2.3. PROPRIEDADES SETORIAIS

#### 2.3.1. Seções abertas

A área setorial, também conhecida como função de empenamento (PILKEY; KITIS, 1996), calculada em um pólo arbitrário A, com origem em  $s = s_0$ , é definida como:

$$\omega_A(s) = \int_{s_0}^s \vec{r}_A(s) \cdot \vec{e}_n(s) ds = \int_{s_0}^s h_A(s) ds \quad 2.16$$

Onde  $\vec{r}_A(s)$  é conhecido como raio vetor e definido como o vetor com origem no ponto A e extremidade final num ponto (x,y) da linha central da seção, como mostra a figura 2.3 .  $\vec{e}_n(s)$  é o vetor unitário normal à tangente no ponto (x,y) e pode ser obtido através do produto vetorial entre o vetor unitário  $e_s$ , tangente ao ponto (x,y) e no sentido positivo do eixo s, e o vetor unitário  $\vec{e}_z$ , pois estes são perpendiculares entre si. O produto  $\vec{r}_A(s) \cdot \vec{e}_n(s)$  é representado por  $h_A$ , cuja equação é demonstrada a seguir.

A partir da figura 2.4, decompõe-se o vetor  $\vec{e}_s$  em termos dos vetores unitários  $\vec{e}_x$  e  $\vec{e}_y$ . O vetor  $\vec{e}_n$  é normal ao plano que contem os vetores  $\vec{e}_s$  e  $\vec{e}_z$ , assim aquele pode ser obtido através do produto vetorial destes. Assim, tem-se que:

$$\vec{e}_s = \frac{\partial x}{\partial s} \cdot \vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial s} \cdot \vec{e}_y \quad 2.17$$

$$\vec{e}_n = \vec{e}_s \times \vec{e}_z \quad 2.18$$

Substituindo a eq. (2.17) em (2.18) e obtendo a expressão para  $\vec{r}_A(s)$ , segue o desenvolvimento para obtenção de  $h_A$ :

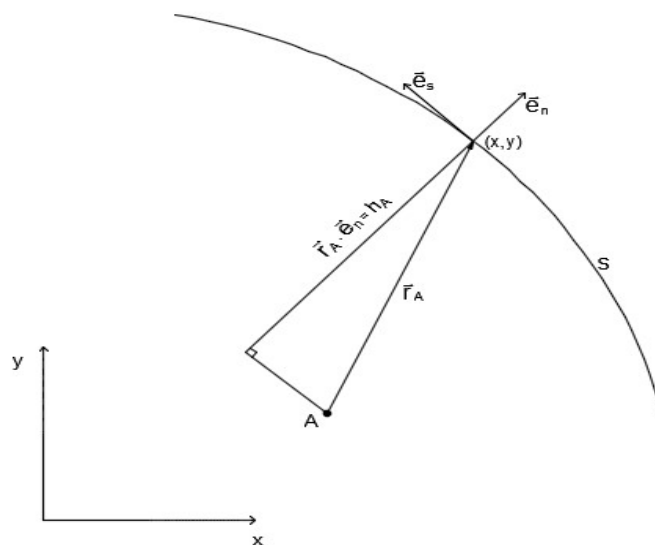


$$\begin{aligned}
\vec{e}_n &= \left( \frac{\partial x}{\partial s} \cdot \vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial s} \cdot \vec{e}_y \right) \times \vec{e}_z = \frac{\partial x}{\partial s} \cdot (-\vec{e}_y) + \frac{\partial y}{\partial s} \cdot (\vec{e}_x) \\
\vec{r}_A(s) &= (x_{(s)} - x_A) \cdot \vec{e}_x - (y_{(s)} - y_A) \cdot \vec{e}_y \\
h_A(s) &= \vec{r}_A(s) \cdot \vec{e}_n = (x_{(s)} - x_A) \frac{\partial y}{\partial s} - (y_{(s)} - y_A) \frac{\partial x}{\partial s}
\end{aligned} \tag{2.19}$$

O sinal do produto escalar  $\vec{r}_A(s) \cdot \vec{e}_n(s)$  é positivo quando o ângulo entre estes dois vetores é menor que  $90^\circ$  e negativo quando maior que  $90^\circ$ . O raio vetor  $\vec{r}_A(s)$  percorre o eixo  $s$  no sentido crescente deste eixo. Analisando a figura 2.3, nota-se que quando  $\vec{r}_A(s)$  percorre o eixo  $s$  de forma a varrer um ângulo no sentido anti-horário, o produto  $\vec{r}_A(s) \cdot \vec{e}_n(s)$  tem sinal positivo. Já quando  $\vec{r}_A(s)$  percorre o eixo  $s$  de forma a varrer um ângulo no sentido horário, o produto vetorial  $\vec{e}_s \times \vec{e}_z$  resulta em um vetor  $\vec{e}_n$  de sentido contrário ao anterior, o que torna o sinal do produto  $\vec{r}_A(s) \cdot \vec{e}_n(s)$  negativo. Dessa forma, fica definido que o sinal da área setorial será positivo quando  $\vec{r}_A(s)$  varrer um ângulo no sentido anti-horário e negativo quando  $\vec{r}_A(s)$  varrer um ângulo no sentido horário.

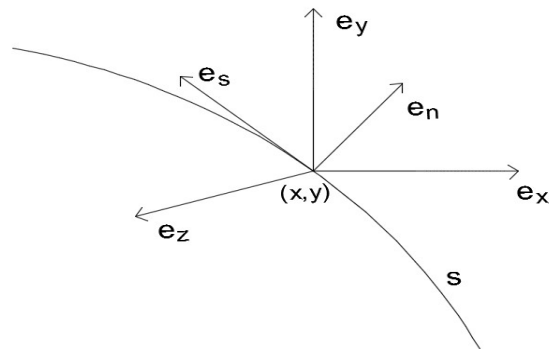
Com a finalidade de encontrar o lugar geométrico do centro de torção  $D$ , faz-se o seguinte artifício de cálculo. Sejam  $A$  e  $D$  dois pontos do plano que contem a seção, como mostra a figura 2.5. Calcula-se a área setorial em relação ao ponto  $A$  em função da área setorial em relação ao ponto  $D$ , onde  $h_A$  é dado pela soma de  $h_D$  com o produto escalar  $\vec{r}_{AD} \cdot \vec{e}_n$ .

Figura 2.3 – Definição da área setorial



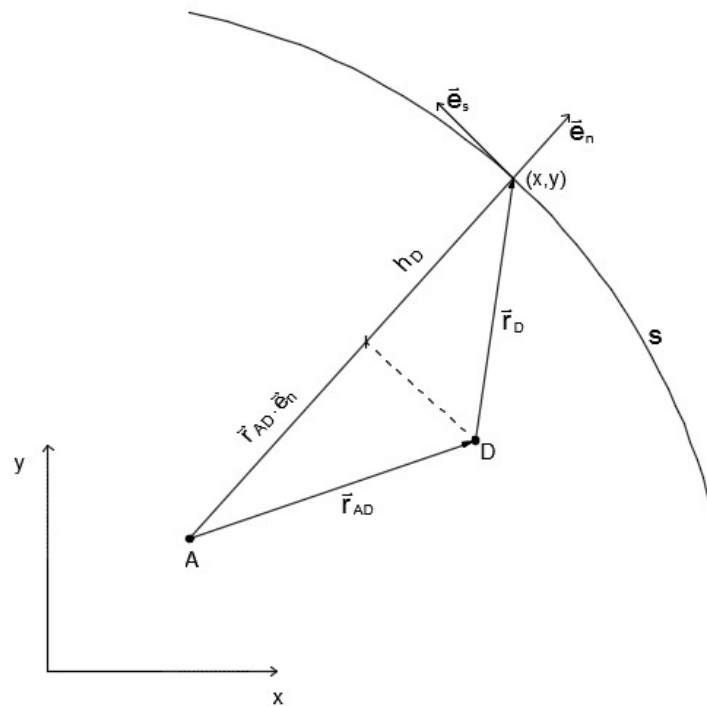
Fonte: Produzido pelo autor

Figura 2.4 – Vetores unitários dos eixos



Fonte: Produzido pelo autor

Figura 2.5 – Artifício matemático para a obtenção da posição do centro de torção



Fonte: Produzido pelo autor

$r_{AD} \cdot e_n$  e  $h_D$ , apresentados na figura 2.5, são obtidos semelhantemente à eq. (2.19). A seguir é apresentado o desenvolvimento para obtenção de  $\omega_A$  em função de  $\omega_D$ .

$$h_A = h_D + \vec{r}_{AD} \cdot \vec{e}_n$$

$$\omega_A = \int_{s_0}^s (h_D + \vec{r}_{AD} \cdot \vec{e}_n) ds = \omega_D + \int_{s_0}^s \vec{r}_{AD} \cdot \vec{e}_n ds$$

$$\vec{r}_{AD} = (x_D - x_A) \cdot \vec{e}_x + (y_D - y_A) \cdot \vec{e}_y$$

$$\begin{aligned}\vec{r}_{AD} \cdot \vec{e}_n &= (x_D - x_A) \cdot \frac{\partial y}{\partial s} - (y_D - y_A) \cdot \frac{\partial x}{\partial s} \\ \omega_A &= \omega_D + \int_{s_0}^s (x_D - x_A) \cdot \frac{\partial y}{\partial s} - (y_D - y_A) \cdot \frac{\partial x}{\partial s} ds \\ \omega_A &= \omega_D + (x_D - x_A) \cdot [y(s) - y(s_0)] - (y_D - y_A) \cdot [x(s) - x(s_0)]\end{aligned}\quad 2.20$$

Multiplicando por  $x$  os dois lados da eq. (2.20) e fazendo a integral da área, obtém-se:

$$I_{x\omega_A} = I_{x\omega_D} + (x_D - x_A) \cdot [I_{xy} - y(s_0) \cdot Q_x] - (y_D - y_A) \cdot [I_x - x(s_0) \cdot Q_x] \quad 2.21$$

Fazendo o mesmo para  $y$ , obtemos:

$$I_{y\omega_A} = I_{y\omega_D} + (x_D - x_A) \cdot [I_y - y(s_0) \cdot Q_y] - (y_D - y_A) \cdot [I_{xy} - x(s_0) \cdot Q_y] \quad 2.22$$

Nas eq. (2.21) e (2.22),  $I_{x\omega_A}$  e  $I_{y\omega_A}$  são os produtos setoriais de inércia no pólo provisório A,  $I_{x\omega_D}$  e  $I_{y\omega_D}$  são os produtos setoriais de inércia no pólo D,  $I_y$  é o momento de inércia no eixo  $x$  e  $I_{xy}$  é o produto de inércia, onde:

$$I_y = \int_A y^2 dA \quad 2.23$$

$$I_{xy} = \int_A xy dA \quad 2.24$$

Isolando  $\omega_D$  na eq. (2.20) e substituindo na eq. (2.11), tem-se:

$$I_{x\omega_D} = Q_x \cdot \{ \omega_A + (y_D - y_A) \cdot [x(s) - x(s_0)] - (x_D - x_A) \cdot [y(s) - y(s_0)] \} \quad 2.25$$

Agora, substituindo a eq. (2.25) na eq. (2.21) e fazendo as devidas simplificações, tem-se:

$$I_{x\omega_A} = (x_D - x_A) \cdot [I_{xy} - y(s) \cdot Q_x] - (y_D - y_A) \cdot [I_x - x(s) \cdot Q_x] + \omega_A \cdot Q_x \quad 2.26$$

A integral na área da área setorial é definida como momento estático setorial, dado por:

$$Q_{\omega} = \int_A \omega dA \quad 2.27$$

Fazendo a integral da área em ambos os lados da eq. (2.26), tem-se:

$$I_{x\omega_A} \cdot A = (x_D - x_A) \cdot [I_{xy} \cdot A - Q_y \cdot Q_x] - (y_D - y_A) \cdot [I_x \cdot A - Q_x \cdot Q_x] + Q_{\omega_A} \cdot Q_x \quad 2.28$$

Dividindo a eq. (2.28) pela área  $A$ , tem-se:

$$I_{x\omega_A} = (x_D - x_A) \cdot [I_{xy} - y_C \cdot Q_x] - (y_D - y_A) \cdot [I_x - x_C \cdot Q_x] + Q_{\omega_A} \cdot x_C \quad 2.29$$

Fazendo um procedimento análogo para a expressão de  $I_{y\omega_A}$ , fica:

$$I_{y\omega_A} = (x_D - x_A) \cdot [I_y - y_C \cdot Q_y] - (y_D - y_A) \cdot [I_{xy} - x_C \cdot Q_y] + Q_{\omega_A} \cdot y_C \quad 2.30$$

Isolando as coordenadas do pólo D e reagrupando os termos de forma matricial, as coordenadas do centro de torção são dadas por:

$$\begin{pmatrix} x_D \\ y_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xy} - y_C \cdot Q_x & x_C \cdot Q_x - I_x \\ I_y - y_C \cdot Q_y & x_C \cdot Q_y - I_{xy} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} I_{x\omega_A} + x_A(I_{xy} - y_C \cdot Q_x) - y_A \cdot (I_x - x_C \cdot Q_x) - Q_{\omega_A} \cdot x_C \\ I_{y\omega_A} + x_A(I_y - y_C \cdot Q_y) - y_A \cdot (I_{xy} - x_C \cdot Q_y) - Q_{\omega_A} \cdot y_C \end{pmatrix} \quad 2.31$$

A área setorial de uma seção pode ser calculada para quaisquer pólo e origem ( $s_0$ ) arbitrários. No entanto, existe um pólo principal e uma origem principal através dos quais se obtém a área setorial principal. O pólo principal é o centro de torção e a origem principal é tal que a seguinte condição seja satisfeita (MORI; MUNAIAR NETO, 2009):

$$Q_{\omega} = \int_A \omega dA = 0 \quad 2.32$$

Integrando na área ambos os lados da eq. (2.20), tem-se:

$$Q_{\omega_A} = Q_{\omega_D} + (x_D - x_A) \cdot [Q_y - y_{(s_0)} \cdot A] - (y_D - y_A) \cdot [Q_x - x_{(s_0)} \cdot A] \quad 2.33$$

Impondo a condição da eq. (2.32) para o pólo D, ou seja, fazendo  $Q_{\omega_D} = 0$ , dividindo ambos os lados pela área A e reagrupando os termos, tem-se:

$$(x_D - x_A) \cdot y_{(s_0)} - (y_D - y_A) \cdot x_{(s_0)} = (x_D - x_A) \cdot y_C - (y_D - y_A) \cdot x_C - \frac{Q_{\omega_A}}{A} \quad 2.34$$

Substituindo a eq. (2.34) na eq. (2.20) e isolando o termo  $\omega_D$ , a equação para a área setorial principal pode ser escrita como:

$$\bar{\omega}_D = \omega_A - \frac{Q_{\omega_A}}{A} + (y_D - y_A) \cdot [x_{(s)} - x_C] - (x_D - x_A) \cdot [y_{(s)} - y_C] \quad 2.35$$

Onde  $\bar{\omega}_D$  é a notação utilizada neste trabalho para a área setorial principal. As propriedades setoriais obtidas através da área setorial principal são denominadas propriedades setoriais principais.

O momento estático setorial principal e os produtos setoriais principais de inércia são zero, visto que essa é uma condição necessária para obtenção da área setorial principal, conforme mostrado neste capítulo. Para efeito de verificação, estas propriedades podem ser obtidas a partir das equações seguintes:

$$Q_{\omega} = \int_A \bar{\omega}_D dA \quad 2.36$$

$$I_{x\omega} = \int_A x \cdot \bar{\omega}_D dA \quad ; \quad I_{y\omega} = \int_A y \cdot \bar{\omega}_D dA \quad 2.37a \text{ e } 2.37b$$

O momento setorial principal de inércia, também conhecido como constante de empenamento, pode ser obtido como:

$$I_{\omega} = \int_A \bar{\omega}_D^2 dA \quad 2.38$$

Pilkey e Kitis (1996) apresentaram uma expressão para o cálculo do momento setorial principal de inércia, dada por:

$$I_{\omega} = I_{\omega_A} - \frac{Q_{\omega_A}^2}{A} - (x_D - x_A)^2 \cdot I_y + 2 \cdot (x_D - x_A) \cdot (y_D - y_A) \cdot I_{xy} - (y_D - y_A)^2 \cdot I_x \quad 2.39$$

No entanto, a eq. (2.39) só é válida para sistemas de eixos com origem no centroide. Como este trabalho visa à obtenção das propriedades para sistemas de eixos quaisquer, foram obtidas equações para o cálculo das propriedades principais, cujos desenvolvimentos estão a seguir.

A partir das eq. (2.29) e (2.30), chamando os termos  $\Delta x = (x_D - x_A)$  e  $\Delta y = (y_D - y_A)$ , isolando-os e resolvendo o sistema, obtém-se:

$$\Delta x = \frac{c1}{c3} \quad \text{e} \quad \Delta y = \frac{c2}{c3} \quad 2.40$$

Onde:

$$c1 = (I_x \cdot Q_{\omega_A} - Q_x \cdot Q_{\omega_A} \cdot x_C) \cdot y_C + (Q_x \cdot I_{y\omega_A} - I_{xy} \cdot Q_{\omega_A} - Q_y \cdot I_{x\omega_A}) \cdot x_C + Q_y \cdot Q_{\omega_A} \cdot x_C^2 - I_x \cdot I_{y\omega_A} + I_{xy} \cdot I_{x\omega_A} \quad 2.41$$

$$c2 = (-I_y \cdot Q_{\omega_A} + Q_y \cdot Q_{\omega_A} \cdot y_C) \cdot x_C + (Q_x \cdot I_{y\omega_A} + I_{xy} \cdot Q_{\omega_A} - Q_y \cdot I_{x\omega_A}) \cdot y_C - Q_x \cdot Q_{\omega_A} \cdot y_C^2 + I_y \cdot I_{x\omega_A} - I_{xy} \cdot I_{y\omega_A} \quad 2.42$$

$$c3 = (I_{xy} \cdot Q_x - I_x \cdot Q_y) \cdot y_C + I_x \cdot I_y - I_{xy}^2 + (I_{xy} \cdot Q_y - I_y \cdot Q_x) \cdot x_C \quad 2.43$$

Substituindo a eq. (2.35), referente à área setorial principal, nas eq. (2.36), (2.37a), (2.37b) e (2.38), e realizando as integrações, as expressões propostas para as propriedades principais ficam:

$$Q_{\omega} = \Delta y \cdot [Q_x - x_C \cdot A] - \Delta x \cdot [Q_y - y_C \cdot A] \quad 2.44$$

$$I_{x\omega} = I_{x\omega_A} - \frac{Q_{\omega_A} \cdot Q_x}{A} + \Delta y \cdot [I_x - x_C \cdot Q_x] - \Delta x \cdot [I_{xy} - y_C \cdot Q_x] \quad 2.45$$

$$I_{y\omega} = I_{y\omega_A} - \frac{Q_{\omega_A} \cdot Q_y}{A} + \Delta y \cdot [I_{xy} - x_C \cdot Q_y] - \Delta x \cdot [I_y - y_C \cdot Q_y] \quad 2.46$$

$$I_{\omega} = I_{\omega_A} - \frac{Q_{\omega_A}^2}{A} + \Delta y \cdot [I_{x\omega_A} - x_C \cdot Q_{\omega_A}] - \Delta x \cdot [I_{y\omega_A} - y_C \cdot Q_{\omega_A}] \quad 2.47$$

A partir das eq. (2.44) à (2.47), é possível obter as propriedades setoriais principais a partir de um sistema de eixos com origem num ponto qualquer do plano da seção.

O momento de inércia à torção ou constante torcional, para seções abertas, é dado por:

$$J = \frac{1}{3} \int_s t^3 ds \quad 2.48$$

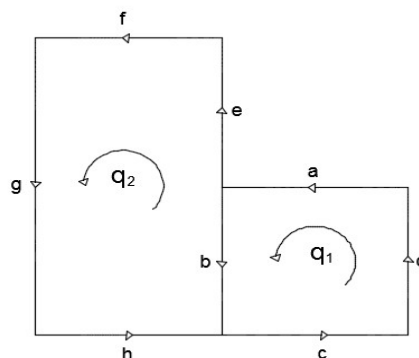
Onde  $t$  é a espessura do segmento. A constante seccional, também chamada de constante polar (PILKEY; KITIS, 1996), é definida como:

$$Ih = \int_A h^2 dA \quad 2.49$$

### 2.3.2. Seções fechadas e multicelulares

Para o cálculo da área setorial em seções fechadas e multicelulares é necessário conhecer o valor do fluxo de cisalhamento ( $q$ ) em cada célula. Em seções multicelulares, para a parede compartilhada, leva-se em consideração os fluxos das células, de tal forma que o fluxo de cisalhamento nessa parede será igual ao fluxo da iésima célula subtraído o fluxo da célula vizinha. Ou seja, considerando a seção multicelular da figura 2.6, o fluxo de cisalhamento da parede  $b$ , compartilhada entre as células 1 e 2, é dado por  $q = q_1 - q_2$ .

Figura 2.6 – Fluxos de cisalhamento em seção multicelular.



Fonte: Produzido pelo autor.

Segundo Pilkey e Kitis (1996), os fluxos de cisalhamento em cada célula são regidos pela seguinte equação:

$$\frac{q}{G} \oint \frac{ds}{t} - \phi' \cdot \Omega = 0 \quad 2.50$$

Na eq. (2.51),  $q$  é o fluxo de cisalhamento,  $G$  é o módulo de cisalhamento,  $\phi'$  é a derivada do ângulo de torção e  $\Omega$  é o valor da área setorial calculada apenas para a iésima célula, dada por:

$$\Omega = \oint h ds \quad 2.51$$

A área setorial para paredes fechadas é dada pela por (PILKEY; KITIS, 1996):

$$\omega = \int_0^s h ds - \frac{1}{G} \int_0^s \frac{\bar{q}}{t} ds \quad 2.52$$

Onde  $\bar{q}$  é o fluxo de cisalhamento para  $\phi' = 1$ . Observa-se que a área setorial para seções fechadas é obtida através de uma correção na área setorial para seções abertas. Determinada a área setorial para seções fechadas, as propriedades setoriais obtidas a partir dela são calculadas da mesma forma que para seções abertas.

Para seções fechadas e multicelulares com  $n$  células, a expressão da constante de torção é dada por (PILKEY; KITIS, 1996):

$$J = \sum_{i=1}^n \frac{q_i \cdot \Omega_i}{G \cdot \phi'} \quad 2.53$$

A constante seccional para seções fechadas é calculada da mesma forma que para seções abertas, através da eq. (2.49).

## 2.4 PROBLEMAS ENVOLVENDO PROPRIEDADES RETANGULARES E SETORIAIS

Quando uma viga de paredes finas abertas, regida pelo modelo de Vlasov (1961), é submetida a carregamentos distribuídos transversais  $p_x$ ,  $p_y$ , segundo os eixos  $x$  e  $y$ , a



carregamentos distribuídos axiais  $p_z$ , segundo o eixo longitudinal, a torques distribuídos  $m_A$ , agindo ao longo do eixo longitudinal que contem o pólo provisório, a torques  $m_x$  e  $m_y$  agindo o longo dos eixos x e y, e ainda submetida a ação de bimomento distribuído  $m_\omega$ , sua equação governante, excluído os efeitos cinéticos, pode ser escrita como (PROKIC, 2005):

$$E \cdot \begin{bmatrix} A & -Q_x & -Q_y & -Q_{\omega_A} \\ -Q_x & I_x & I_{xy} & I_{x\omega_A} \\ -Q_y & I_{xy} & I_y & I_{y\omega_A} \\ -Q_{\omega_A} & I_{x\omega_A} & I_{y\omega_A} & I_{\omega_A} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w'''' \\ u''''_A \\ v''''_A \\ \phi'''' \end{bmatrix} - G \cdot J \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w' \\ u''_A \\ v''_A \\ \phi'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_z \\ p_x - m'_y \\ p_y - m'_x \\ m_A - m'_\omega \end{bmatrix} \quad 2.54$$

Na eq. (2.54),  $w$  representa o deslocamento longitudinal,  $u_A$  o deslocamento em x do pólo provisório,  $v_A$  o deslocamento em y do pólo provisório e  $E$  o módulo de elasticidade longitudinal.

Se o pólo provisório for deslocado para o centro de torção e os efeitos de flexão forem medidos em relação às direções principais centroidais, a eq. (2.54) é simplificada e fica escrita como:

$$E \cdot \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{\omega_A} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w'''' \\ u''''_D \\ v''''_D \\ \phi'''' \end{bmatrix} - G \cdot J \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w' \\ u''_D \\ v''_D \\ \phi'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_z \\ p_x - m'_y \\ p_y - m'_x \\ m_D - m'_\omega \end{bmatrix} \quad 2.55$$

Na eq. (2.55),  $u_D$  representa o deslocamento em x do centro de torção,  $v_D$  o deslocamento em y do centro de torção e  $m_D$  o torque distribuído agindo ao longo do eixo longitudinal que contem o centro de torção.

Convém notar que o procedimento de cálculo das propriedades geométricas neste trabalho foi desenvolvido para sistemas de eixos quaisquer, tanto do ponto de vista da flexão, quanto da torção, podendo fornecer dados geométricos diretamente para a eq. (2.54) e para sua forma simplificada, dada pela eq. (2.55).

### 3. PROCESSO NUMÉRICO COMPUTACIONAL

Neste trabalho foi desenvolvido um processo numérico computacional, codificado no Mathcad, para determinação de propriedades geométricas de seções abertas, fechadas e mistas compostas por paredes retas e curvas.

O processo numérico é utilizado para a determinação das seguintes propriedades seccionais:

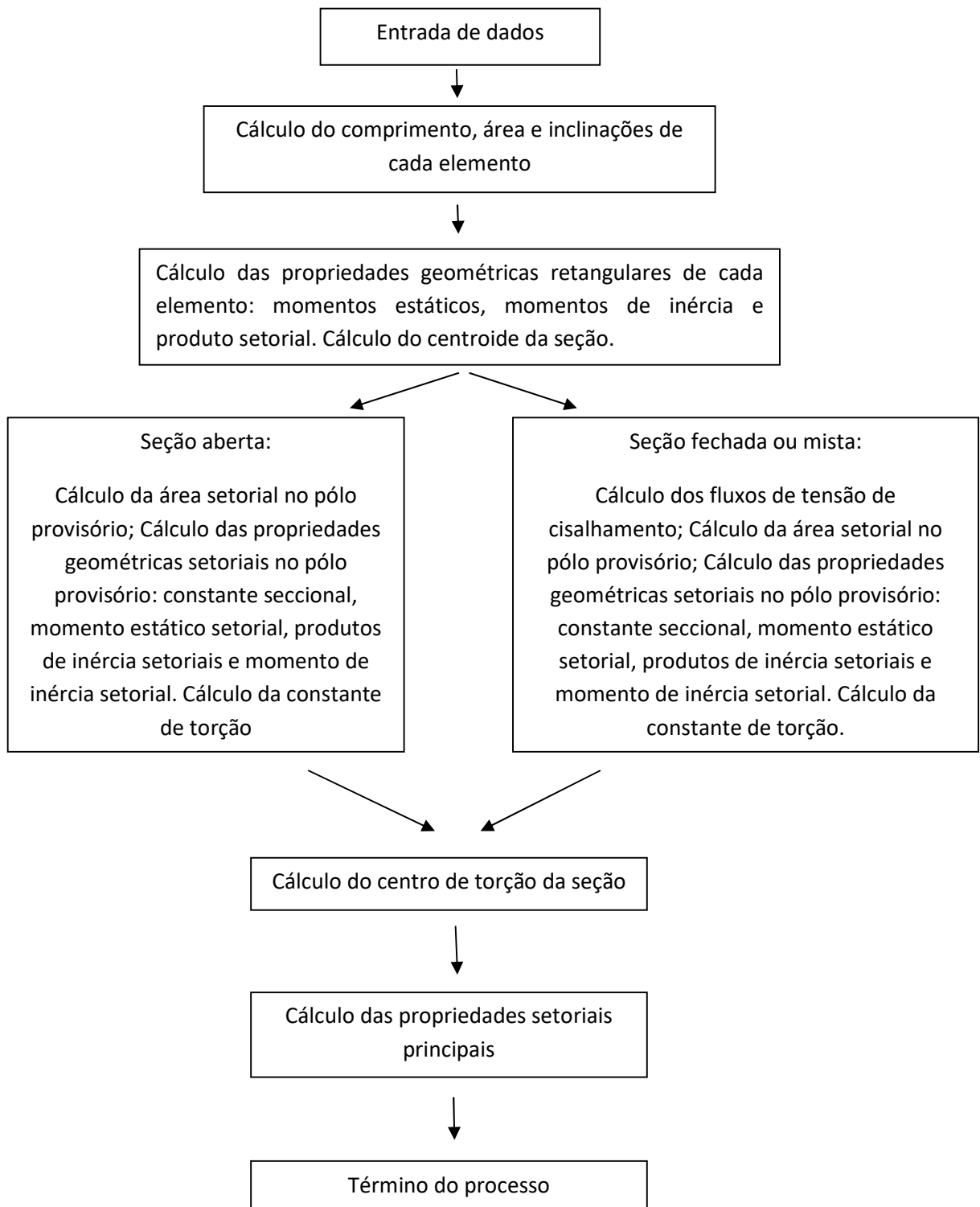
- Coordenadas do centroide ( $x_C, y_C$ )
- Momentos estáticos ( $Q_x, Q_y$ )
- Momentos de inércia ( $I_x, I_y$ )
- Produto de inércia ( $I_{xy}$ )
- Coordenadas do centro de torção ( $x_D, y_D$ )
- Momento estático setorial ( $Q_\omega$ )
- Produtos de inércia setoriais ( $I_{x\omega}, I_{y\omega}$ )
- Constante torcional ( $J$ )
- Constante seccional ( $I_h$ )
- Momento de inércia setorial ( $I_\omega$ )

Para a aplicação do processo computacional no cálculo dessas propriedades, a seção transversal está sujeita às seguintes hipóteses:

- a) O processo numérico é válido para seções com segmentos retilíneos e circulares;
- b) a seção transversal é dividida em segmentos binodais. Cada segmento é limitado por dois nós, inicial e final;
- c) A espessura de cada segmento deve ser constante, podendo diferir um dos outros;
- d) As seções fechadas e mistas devem receber, para cada ciclo fechado, um corte hipotético;
- e) Cada segmento circular deve estar inserido em apenas um quadrante em relação ao sistema de eixos e possuir ângulo máximo de  $90^\circ$ .
- f) Em seções com segmentos circular, o pólo provisório deve ser posicionado no centro de curvatura. Isso implica que todos os segmentos circulares da seção devem possuir o mesmo centro de curvatura.

A figura 3.1 apresenta um fluxograma que mostra as etapas do processo computacional geral.

Figura 3.1 – Fluxograma geral do processo computacional

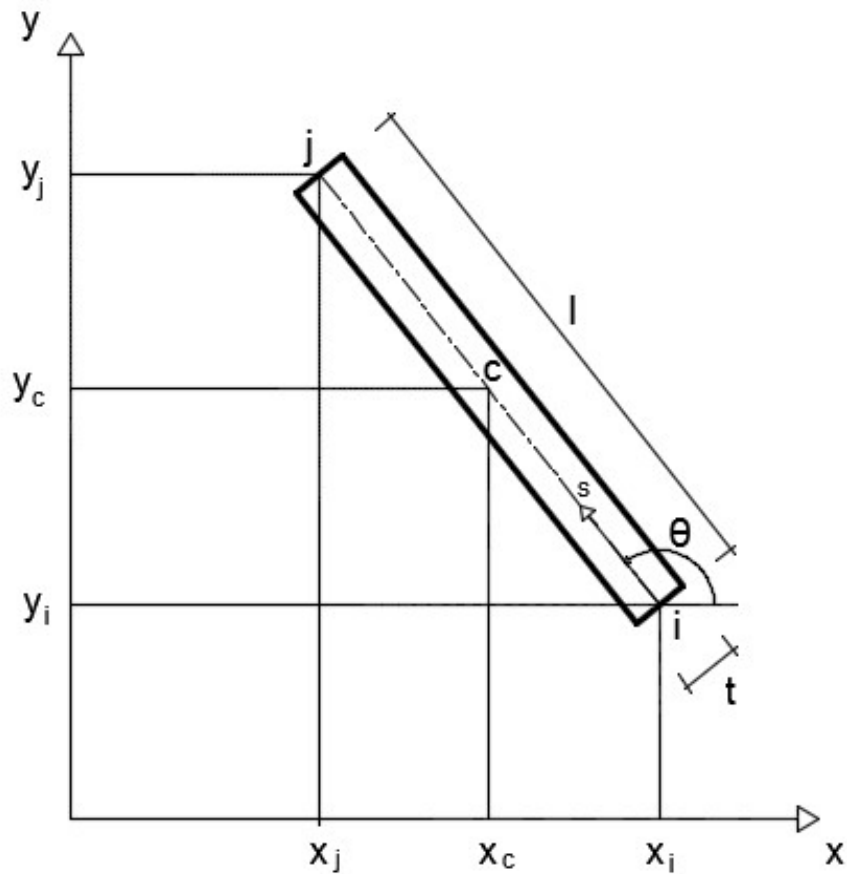


Fonte: Produzido pelo autor.

### 3.1. CONFIGURAÇÃO GEOMÉTRICA DO IÉSIMO SEGMENTO

A configuração geométrica do iésimo segmento para segmentos retos e curvos são apresentadas nas figuras 3.2 e 3.3, respectivamente.

Figura 3.2 – Segmento reto da seção transversal



Fonte: Produzido pelo autor

i – nó inicial;

j – nó final;

c – centroide;

$x_i, y_i$  – coordenadas do nó inicial;

$x_j, y_j$  – coordenadas do nó final;

$x_c, y_c$  – coordenadas do centroide;

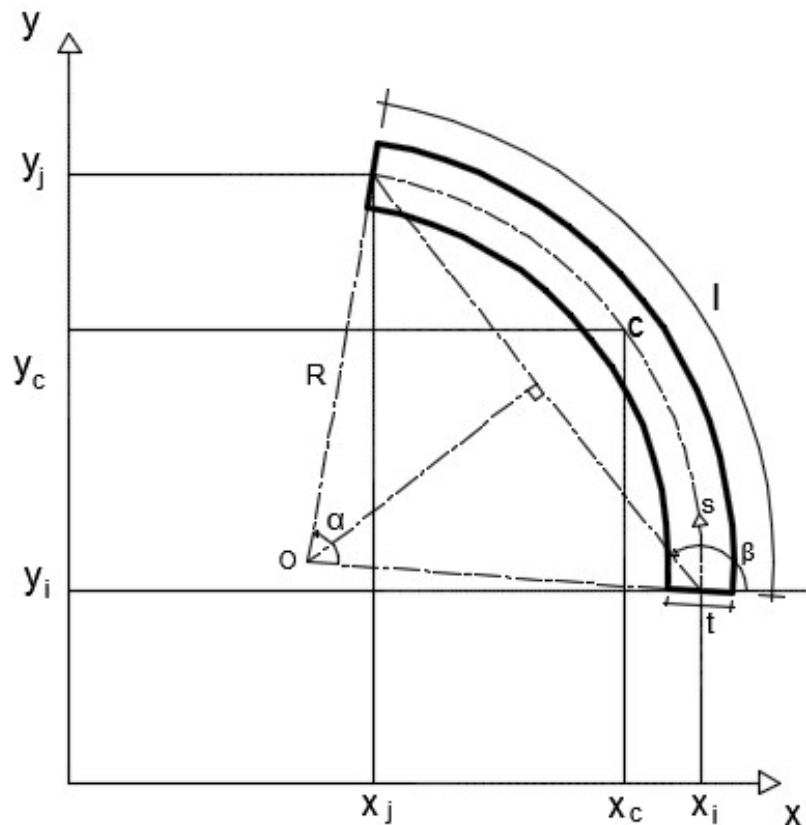
o – centro de curvatura;

$\theta$  – ângulo que o segmento retilíneo, orientado do nó i para o nó j, faz com o eixo x;

$\alpha$  – ângulo do arco de circunferência.

R – raio do arco de circunferência;  
 l – comprimento do segmento;  
 t – espessura do segmento;

Figura 3.3 – Segmento circular da seção transversal



Fonte: Produzido pelo autor

### 3.2. PROPRIEDADES RETANGULARES DO IÉSIMO SEGMENTO

A seguir são apresentadas as expressões utilizadas no cálculo das propriedades retangulares para segmentos retos e curvos.

#### 3.2.1. Segmentos retos

As propriedades geométricas retangulares de cada segmento retilíneo foram calculadas através das fórmulas descritas abaixo.

Comprimento do segmento:

$$l = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \quad 3.1$$

Área do segmento:

$$a = l \cdot t \quad 3.2$$

Inclinação do segmento retilíneo orientado de i para j:

$$\cos\theta = \frac{x_j - x_i}{l} \quad 3.3$$

$$\sin\theta = \frac{y_j - y_i}{l} \quad 3.4$$

Coordenadas do centroide do segmento:

$$x_c = \frac{x_i + x_j}{2} \quad 3.5$$

$$y_c = \frac{y_i + y_j}{2} \quad 3.6$$

Os momentos estáticos, momentos de inércia e produto de inércia, dados pelas eq. (2.2a), (2.2b), (2.5), (2.23) e (2.24), são foram reescritos e implementados no programa da seguinte forma:

$$Q_x = x_c \cdot a \quad 3.7$$

$$Q_y = y_c \cdot a \quad 3.8$$

$$I_x = \frac{1}{2} \cdot \frac{(t \cdot l^3 + l \cdot t^3)}{12} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(t \cdot l^3 - l \cdot t^3)}{12} \cdot (\sin^2\theta - \cos^2\theta) + t \cdot l \cdot \frac{(x_i + x_j)^2}{4} \quad 3.9$$

$$I_y = \frac{1}{2} \cdot \frac{(t \cdot l^3 + l \cdot t^3)}{12} - \frac{1}{2} \cdot \frac{(t \cdot l^3 - l \cdot t^3)}{12} \cdot (\sin^2\theta - \cos^2\theta) + t \cdot l \cdot \frac{(y_i + y_j)^2}{4} \quad 3.10$$

$$I_{xy} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(t \cdot l^3 - l \cdot t^3)}{12} \cdot 2 \cdot \cos\theta \cdot \sin\theta + t \cdot l \cdot \frac{(x_i + x_j) \cdot (y_i + y_j)}{4} \quad 3.11$$

### 3.2.2. Segmentos curvos

As propriedades geométricas retangulares de cada segmento foram calculadas através das fórmulas descritas a seguir:

Ângulo do arco de circunferência:

$$\alpha = 2 \cdot \arcsen\left(\frac{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}}{2 \cdot R}\right) \quad 3.12$$

Comprimento do segmento:

$$l = R \cdot \alpha \quad 3.13$$

Área do segmento:

$$a = l \cdot t \quad 3.14$$

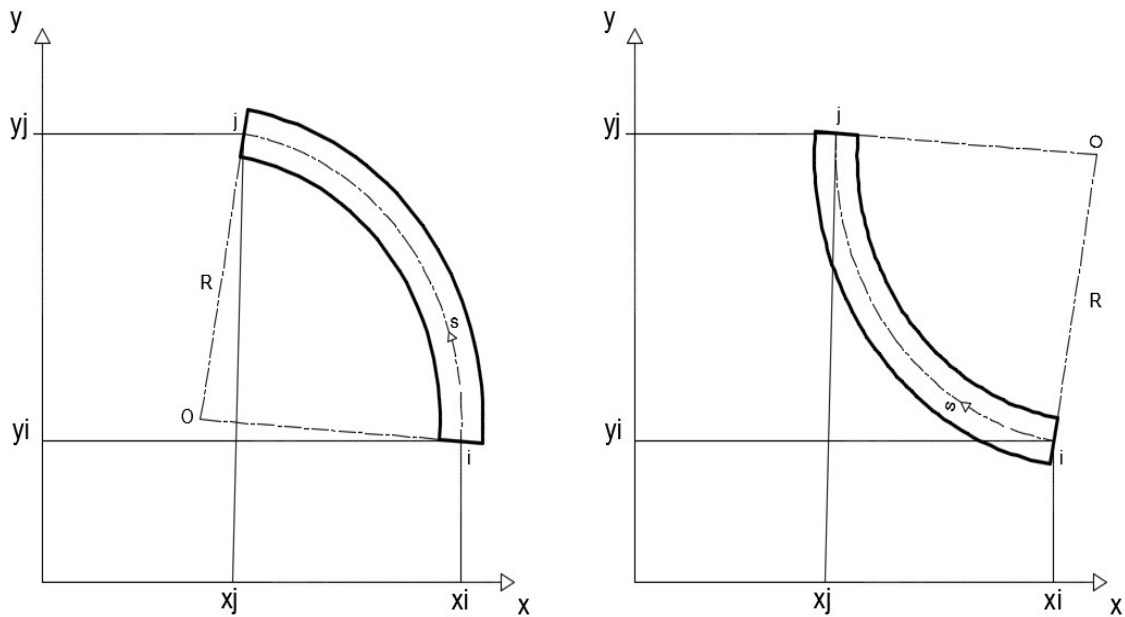
Inclinação do segmento retilíneo orientado de i para j:

$$\cos\theta = \frac{x_j - x_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}} \quad 3.15$$

$$\sin\theta = \frac{y_j - y_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}} \quad 3.16$$

O cálculo das propriedades geométricas foi feito procurando utilizar um número mínimo de dados de entrada, para que a utilização do programa não se tornasse tediosa. Quanto aos segmentos curvos, tendo como dados de entrada o raio e as coordenadas dos nós inicial e final, o segmento pode ter duas representações, como mostra a figura 3.4.

Figura 3.4 – Representação de segmento circular



Fonte: Produzido pelo autor

Uma solução para isso seria impor como dado de entrada o centro de curvatura, no entanto determiná-lo seria mais um trabalho para o usuário. Dessa forma, visando facilitar a utilização do programa, foi incluído como dado de entrada o sentido, horário ou anti-horário, quando se percorre o segmento do nó inicial para o nó final. Esse dado é representado por “ $\eta$ ” e será 1 quando o sentido for anti-horário e -1 quando horário. Assim, foi possível desenvolver expressões genéricas para a obtenção das coordenadas do centro de curvatura, dadas por:

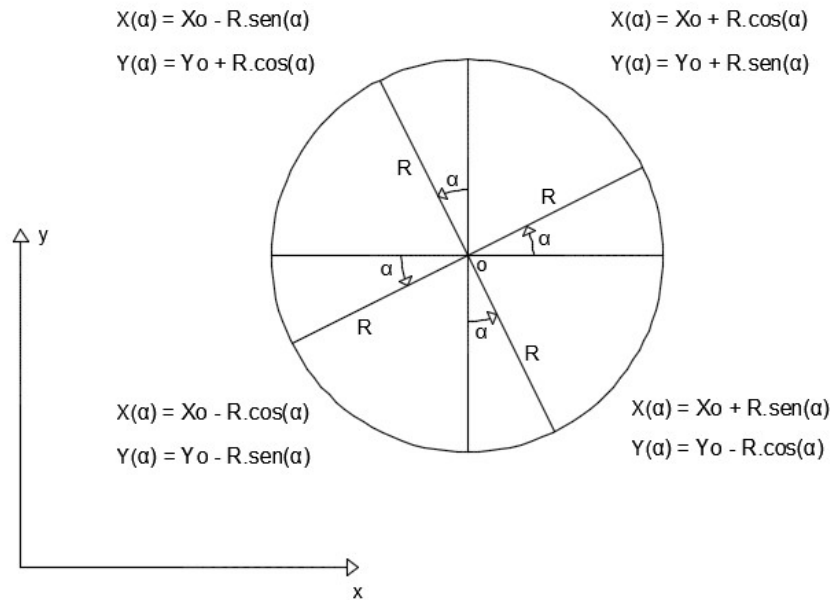
$$x_o = \left( \frac{x_i + x_j}{2} \right) - \eta \cdot R \cdot \cos \left( \frac{\alpha}{2} \right) \cdot \text{sen} \theta \quad 3.17$$

$$y_o = \left( \frac{y_i + y_j}{2} \right) + \eta \cdot R \cdot \cos \left( \frac{\alpha}{2} \right) \cdot \text{cos} \theta \quad 3.18$$

Para o cálculo dos momentos estáticos e de inércia foi necessário a obtenção das funções  $x(\alpha)$  e  $y(\alpha)$  ao longo do segmento. Tais funções variam dependendo do quadrante e do sentido, horário ou anti-horário, quando se percorre o segmento do nó inicial para o nó final, como mostra as figura 3.5 e 3.6. Isso justifica a hipótese adotada neste trabalho de que cada segmento circular deve estar contido num único quadrante.

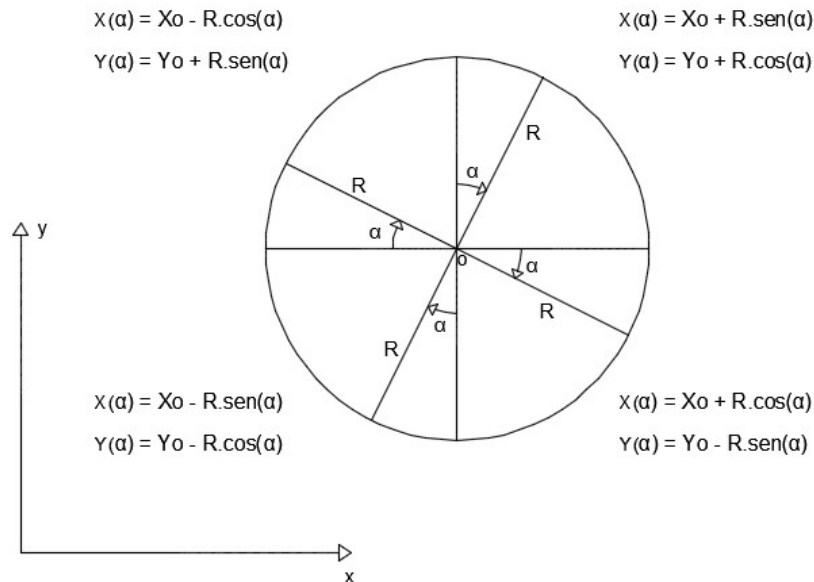


Figura 3.5 – Equações de x e y em cada quadrante para um segmento curvo orientado no sentido anti-horário.



Fonte: Produzido pelo autor

Figura 3.6 – Equações de x e y em cada quadrante para um segmento curvo orientado no sentido horário.



Fonte: Produzido pelo autor

De posse dessas funções e sabendo que  $dA = t.ds = t.R.d\alpha$ , foi possível implementar o cálculo das demais propriedades retangulares para segmentos curvos. As equações dos

momentos estáticos, momentos de inércia e produto de inércia apresentadas no capítulo 2, para cada segmento, foram reescritas e utilizadas no programa da seguinte forma:

$$Q_x = t.R. \int_0^\alpha x(\alpha) d\alpha \quad 3.19$$

$$Q_y = t.R. \int_0^\alpha y(\alpha) d\alpha \quad 3.20$$

$$I_x = t.R. \int_0^\alpha x(\alpha)^2 d\alpha \quad 3.21$$

$$I_y = t.R. \int_0^\alpha y(\alpha)^2 d\alpha \quad 3.22$$

$$I_{xy} = t.R. \int_0^\alpha x(\alpha).y(\alpha) d\alpha \quad 3.23$$

### 3.3. PROPRIEDADES RETANGULARES DA SEÇÃO

O cálculo das propriedades geométricas retangulares da seção foi feito basicamente através do somatório das respectivas propriedades dos segmentos que compõem a seção. Sendo  $n$  o número de segmentos, tais propriedades foram calculadas da seguinte forma:

Área da seção:

$$A = \sum_{i=1}^n a_i \quad 3.24$$

Comprimento da seção:

$$L = \sum_{i=1}^n l_i \quad 3.25$$

Momentos estáticos:

$$Q_x = \sum_{i=1}^n (Q_x)_i \quad 3.26$$

$$Q_y = \sum_{i=1}^n (Q_y)_i \quad 3.27$$

Centroide da seção:

$$x_c = \frac{Q_x}{A} \quad 3.28$$

$$y_c = \frac{Q_y}{A} \quad 3.29$$

Momentos de inércia e produto de inércia nos eixos x e y arbitrários:

$$I_x = \sum_{i=1}^n (I_x)_i \quad 3.30$$

$$I_y = \sum_{i=1}^n (I_y)_i \quad 3.31$$

$$I_{xy} = \sum_{i=1}^n (I_{xy})_i \quad 3.32$$

#### 3.4. PROPRIEDADES SETORIAIS NO PÓLO PROVISÓRIO

Para o cálculo das propriedades geométricas setoriais foi necessário obter funções genéricas para x e y ao longo do segmento considerado. Tais funções para segmentos curvos foram definidas no tópico 3.2.2 e apresentadas nas figuras 3.5 e 3.6. Para segmentos retos, essas funções são definidas como:

$$x_{(s)} = \cos\theta \cdot s + x_i \quad 3.33$$

$$y_{(s)} = \sen\theta \cdot s + y_i \quad 3.34$$

Cabe aqui notar que as funções x e y, para trechos retos, são definidas em função de s e o intervalo de integração é dado por  $s = 0$  e  $s = l$ . Já nos trechos curvos, como mostrado nas figuras 3.5 e 3.6, essas funções foram definidas em função do ângulo do arco, com intervalo de integração compreendido entre 0 e  $\alpha$ .

### 3.4.1. Área setorial para seções abertas

Utilizando a expressão definida na eq. (2.16), a área setorial a partir de um pólo A para segmentos retilíneos e curvos foram calculadas, respectivamente, por:

$$\omega = \int_0^l [(\cos\theta \cdot s + x_i - x_A) \cdot \text{sen}\theta - (\text{sen}\theta \cdot s + y_i - y_A) \cdot \cos\theta] ds + \omega_o \quad 3.35$$

$$\omega = R \cdot \int_0^\alpha \left[ (x_{(\alpha)} - x_A) \cdot \frac{\delta y_{(\alpha)}}{\delta \alpha} - (y_{(\alpha)} + y_A) \cdot \frac{\delta x_{(\alpha)}}{\delta \alpha} \right] d\alpha + \omega_o \quad 3.36$$

Sendo  $\omega$  o valor da área setorial no nó final do segmento e  $\omega_o$  o valor da área setorial no nó final do segmento anterior. Para o primeiro segmento calculado, a área setorial do nó inicial tem valor zero. As extremidades dos elementos conectados a um único nó têm o mesmo valor de área setorial.

### 3.4.2. Área setorial para seções fechadas

Como mostrado no capítulo 2, para o cálculo da área setorial em seções fechadas e multicelulares é necessário encontrar, para cada célula, o fluxo de cisalhamento  $q$ , obtido através da eq. (2.50). O termo  $\Omega$  é dado pela eq. (2.51) e reescrito para segmentos retos e curvos, respectivamente, como:

$$\Omega_j = \sum_{n=a}^z \left\{ \int_0^1 [(\cos\theta_n \cdot s + x_{i_n} - x_A) \cdot \text{sen}\theta_n - (\text{sen}\theta_n \cdot s + y_{i_n} - y_A) \cdot \cos\theta_n] ds + \omega_{n-1} \right\} \quad 3.37$$

$$\Omega_j = \sum_{n=a}^z \left\{ R \cdot \int_0^1 \left[ (x_{(\alpha)_n} - x_A) \cdot \frac{\delta y_{(\alpha)_n}}{\delta \alpha} - (y_{(\alpha)_n} - y_A) \cdot \frac{\delta x_{(\alpha)_n}}{\delta \alpha} \right] d\alpha + \omega_{n-1} \right\} \quad 3.38$$

Sendo  $a$  e  $z$  os índices do primeiro e último segmento, respectivamente, da  $j$ -ésima célula e  $\omega_{n-1}$  é o valor da área setorial no final do segmento anterior, considerando apenas os segmentos da  $j$ -ésima célula. Dessa forma é obtido um  $\Omega$  para cada célula.

No primeiro termo da eq. (2.50), deve-se levar em consideração o fluxo das células vizinhas nos respectivos segmentos compartilhados, de tal modo que:

$$q = q_j - q_{v_1} \quad 3.39$$

Onde  $q_j$  é o fluxo na  $j$ -ésima célula e  $q_{v_1}$  é o fluxo na célula vizinha.

Célula vizinha é definida neste trabalho como a célula que compartilha determinado segmento com a célula na qual está sendo calculado o fluxo de cisalhamento.

Dessa forma, levando em consideração todas as possíveis células vizinhas em relação a cada segmento da  $j$ -ésima célula, a eq. (2.50) para a  $j$ -ésima célula foi reescrita da seguinte forma:

$$\frac{1}{G} \cdot q_j \cdot \sum_{i=a}^z \left( \frac{l_i}{t_i} \right) - \frac{1}{G} \cdot q_{v_1} \cdot \frac{l_{j,v_1}}{t_{j,v_1}} - \frac{1}{G} \cdot q_{v_2} \cdot \frac{l_{j,v_2}}{t_{j,v_2}} \dots - \frac{1}{G} \cdot q_{v_n} \cdot \frac{l_{j,v_n}}{t_{j,v_n}} - \phi' \cdot \Omega_j = 0 \quad 3.40$$

Onde  $l_{j,v_n}$  é o comprimento do segmento comum à  $j$ -ésima célula e à célula vizinha  $v_n$  e  $t_{j,v_n}$  é a espessura do segmento comum à  $j$ -ésima célula e à célula vizinha  $v_n$ .

Resolvendo a eq. (2.50) para todas as células da seção, constrói-se o sistema abaixo, o qual é utilizado no processo computacional para a obtenção do fluxo de cisalhamento em cada célula.

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \left( \sum_{i=a}^z \frac{l_i}{t_i} \right)_{cel1} & \frac{1}{G} \cdot \frac{l_{1,2}}{t_{1,2}} & \dots & \frac{1}{G} \cdot \frac{l_{1,n}}{t_{1,n}} \\ \frac{1}{G} \cdot \frac{l_{2,1}}{t_{2,1}} & \left( \sum_{i=a}^z \frac{l_i}{t_i} \right)_{cel2} & \dots & \frac{1}{G} \cdot \frac{l_{2,n}}{t_{2,n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{G} \cdot \frac{l_{n,1}}{t_{n,1}} & \frac{1}{G} \cdot \frac{l_{n,2}}{t_{n,2}} & \dots & \left( \sum_{i=a}^z \frac{l_i}{t_i} \right)_{celn} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \Omega_1 \cdot \phi' \\ \Omega_2 \cdot \phi' \\ \vdots \\ \Omega_n \cdot \phi' \end{pmatrix} \quad 3.41$$

Obtido os fluxos de cisalhamento, a área setorial para seções fechadas com segmentos retos e curvos é obtida através da eq. (2.52), reescrita da seguinte forma:

$$\omega_i = \int_0^{l_i} h_i ds - (q_j - q_v) \cdot \frac{l_i}{t_i} + \omega_o \quad 3.42$$

Onde:

$q_j$  é o fluxo da célula dominante à qual o iésimo seguimento faz parte;

$q_v$  é o fluxo da célula vizinha que compartilha o iésimo seguimento;

$l_i$  é comprimento do iésimo segmento;

$t_i$  é a espessura do iésimo segmento;

$\omega_i$  é o valor da área setorial no nó final do iésimo seguimento;

$\omega_o$  é o valor da área setorial no nó final do seguimento anterior.

A primeira parcela da eq. (3.42) corresponde à área setorial para seções abertas, cuja expressão utilizada foi apresentada nas eq. (3.35) e (3.36) para segmentos retos e curvos, respectivamente.

### 3.4.3. Momento estático, Momento de inércia e Produtos de inércia setoriais

Em segmentos retos, a área setorial é descrita por uma variação linear, pois  $h$  é constante ao longo do segmento. Em segmentos curvos, quando o pólo provisório coincide com o centro de curvatura, a área setorial também pode ser descrita por uma variação linear em relação ao comprimento do arco, devido a  $h$  ser constante e igual ao raio  $R$  ao longo do segmento. Essa simplificação foi adotada no programa desenvolvido, o que justifica a hipótese adotada que impõe que o pólo provisório coincida com o centro de curvatura em seções que contenham trechos curvos. Assim, conhecidos os valores da área setorial no nó inicial e final de um segmento, pode-se escrever a função da área setorial como:

$$\omega_{(s)} = \frac{(\omega_f - \omega_i)}{l} \cdot s + \omega_i \quad 3.43$$

Onde  $\omega_i$  e  $\omega_f$  são os valores da área setorial nos nós inicial e final, respectivamente, do segmento.

A eq. (3.43) foi utilizada para o cálculo das propriedades setoriais no pólo provisório A que decorrem da integração da área setorial, ou seja, o momento estático setorial, os produtos de inércia setoriais e o momento de inércia setorial, reescritas da seguinte forma:

a) Para segmentos retos

$$Q_{\omega_A} = t. \int_0^l \left[ \frac{(\omega_f - \omega_i)}{l} \cdot s + \omega_i \right] ds \quad 3.44$$

$$I_{x\omega_A} = t. \int_0^l \left\{ \left[ \frac{(\omega_f - \omega_i)}{l} \cdot s + \omega_i \right] \cdot (\cos\theta \cdot s + x_i) \right\} ds \quad 3.45$$

$$I_{y\omega_A} = t. \int_0^l \left\{ \left[ \frac{(\omega_f - \omega_i)}{l} \cdot s + \omega_i \right] \cdot (\sin\theta \cdot s + y_i) \right\} ds \quad 3.46$$

$$I_{\omega_A} = t. \int_0^l \left[ \frac{(\omega_f - \omega_i)}{l} \cdot s + \omega_i \right]^2 ds \quad 3.47$$

b) Para segmentos circulares

$$Q_{\omega_A} = t. \int_0^l \left[ \frac{(\omega_f - \omega_i)}{l} \cdot s + \omega_i \right] ds \quad 3.48$$

$$I_{x\omega_A} = t. \int_0^l \left\{ \left[ \frac{(\omega_f - \omega_i)}{l} \cdot s + \omega_i \right] \cdot x\left(\frac{s}{R}\right) \right\} ds \quad 3.49$$

$$I_{y\omega_A} = t. \int_0^l \left\{ \left[ \frac{(\omega_f - \omega_i)}{l} \cdot s + \omega_i \right] \cdot y\left(\frac{s}{R}\right) \right\} ds \quad 3.50$$

$$I_{\omega_A} = t. \int_0^l \left[ \frac{(\omega_f - \omega_i)}{l} \cdot s + \omega_i \right]^2 ds \quad 3.51$$

As funções de  $x$  e  $y$  para segmentos circulares foram expressas em função de  $s/R$  através da relação  $s = \alpha R$ , onde  $s$  é o comprimento do arco.

Os valores dessas propriedades na seção são dados pelo somatório das respectivas propriedades dos  $n$  segmentos, logo foram obtidos da seguinte forma:

$$Q_{\omega_A} = \sum_{i=1}^n (Q_{\omega_A})_i \quad 3.52$$

$$I_{x\omega_A} = \sum_{i=1}^n (I_{x\omega_A})_i \quad 3.53$$

$$I_{y\omega_A} = \sum_{i=1}^n (I_{y\omega_A})_i \quad 3.54$$

$$I_{\omega_A} = \sum_{i=1}^n (I_{\omega_A})_i \quad 3.55$$

#### 3.4.4. Constante seccional

A constante seccional no pólo A é dada pela eq. (2.49) foi reescrita para segmentos retos e curvos, respectivamente, como:

$$Ih_A = t. \int_0^l [(\cos\theta \cdot s + x_i - x_A) \cdot \text{sen}\theta - (\text{sen}\theta \cdot s + y_i - y_A) \cdot \cos\theta]^2 ds \quad 3.56$$

$$Ih_A = R. \int_0^1 \left[ (x(\alpha) - x_A) \cdot \frac{\delta y(\alpha)}{\delta \alpha} - (y(\alpha) - y_A) \cdot \frac{\delta x(\alpha)}{\delta \alpha} \right]^2 d\alpha \quad 3.57$$

O valor da constante seccional para a seção foi escrito como:

$$Ih_A = \sum_{i=1}^n (Ih_A)_i + Ih_{A_0} \quad 3.58$$

Onde n é o número de segmentos da seção e  $Ih_{A_0}$  é o valor da constante seccional no final do segmento anterior.

#### 3.4.5. Constante torcional

A eq. (2.49) da constante torcional para seções abertas com n segmentos foi reescrita e inserida no programa da seguinte forma:



$$J = \sum_{i=1}^n \frac{1}{3} l_i \cdot t_i^3 \quad 3.59$$

Para seções fechadas, a eq. (2.71) foi reescrita como:

$$J = \sum_{i=1}^n \frac{q_i \cdot \Omega_i}{G \cdot \phi} \quad 3.60$$

A constante torcional para seções mistas foi obtida através somatório das eq. (3.59) e (3.60)

### 3.4.6. Centro de torção

Determinadas as propriedades geométricas e setoriais da seção no pólo provisório, as coordenadas do centro de torção foram calculadas através da eq. (2.31), inseridas no programa como:

$$\begin{pmatrix} x_D \\ y_D \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B \quad 3.61$$

Onde:

$$A = \begin{pmatrix} I_{xy} - y_C \cdot Q_x & x_C \cdot Q_x - I_x \\ I_y - y_C \cdot Q_y & x_C \cdot Q_y - I_{xy} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} I_{x\omega_A} + x_A(I_{xy} - y_C \cdot Q_x) - y_A \cdot (I_x - x_C \cdot Q_x) - Q_{\omega_A} \cdot x_C \\ I_{y\omega_A} + x_A(I_y - y_C \cdot Q_y) - y_A \cdot (I_{xy} - x_C \cdot Q_y) - Q_{\omega_A} \cdot y_C \end{pmatrix}$$

## 3.5. PROPRIEDADES SETORIAIS PRINCIPAIS

As propriedades geométricas setoriais principais foram obtidas a partir das eq. (2.44), (3.45), (2,46) e (3,47), reescritas da seguinte forma:

$$Q_\omega = Q_{\omega_A} - \frac{Q_{\omega_A}}{A} + \Delta y \cdot [Q_x - x_C \cdot A] - \Delta x \cdot [Q_y - y_C \cdot A] \quad 2.32$$

$$I_{x\omega} = I_{x\omega_A} - \frac{Q_{\omega_A} \cdot Q_x}{A} + \Delta y \cdot [I_x - x_C \cdot Q_x] - \Delta x \cdot [I_{xy} - y_C \cdot Q_x] \quad 2.32$$

$$I_{y\omega} = I_{y\omega_A} - \frac{Q_{\omega_A} \cdot Q_y}{A} + \Delta y \cdot [I_{xy} - x_C \cdot Q_y] - \Delta x \cdot [I_y - y_C \cdot Q_y] \quad 2.32$$

$$I_{\omega} = I_{\omega_A} - \frac{Q_{\omega_A}^2}{A} + \Delta y \cdot [I_{x\omega_A} - x_C \cdot Q_{\omega_A}] - \Delta x \cdot [I_{y\omega_A} - y_C \cdot Q_{\omega_A}] \quad 2.32$$

## 4. ENTRADA DE DADOS

### 4.1. MODELAÇÃO DA SEÇÃO

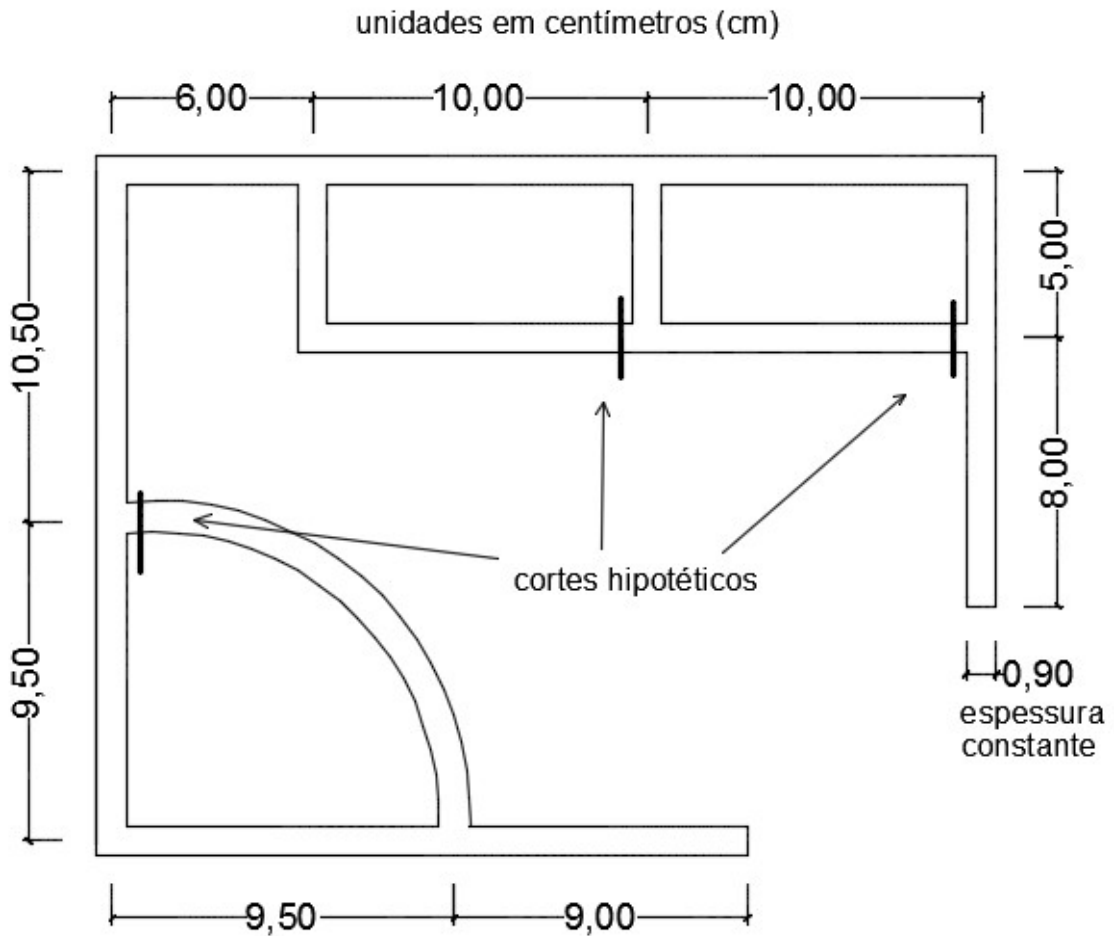
Para possibilitar a entrada de dados, a seção deve ser modelada por nós, segmentos e células, seguindo as seguintes instruções:

- a) Desenhar um croqui da seção, onde cada segmento é representado por sua linha média com nós nas extremidades. Para a seção exemplo da figura 4.1 é apresentado um croqui na figura 4.2.
- b) Em caso de seções fechadas ou mistas, deve-se fazer, para cada célula, um corte hipotético, de forma que a seção seja considerada como aberta. Os cortes devem ser em locais que permitam que as orientações dos segmentos que compõem a célula sejam no sentido anti-horário. Considerações acerca das orientações dos segmentos são apresentadas na instrução seguinte. Um exemplo de cortes hipotéticos é mostrado na seção exemplo na figura 4.1.
- c) Numerar os segmentos de 1 a  $N_{\text{seg}}$ , sendo  $N_{\text{seg}}$  o número de segmentos da seção. O primeiro segmento numerado deve ter o nó inicial livre. O segmento de número 2 deve ter o nó inicial coincidindo com o nó final do seguimento de número 1, e assim sucessivamente. Para bifurcações, quando nenhum dos caminhos fizer parte de uma célula, escolhe-se arbitrariamente um dos caminhos e numeram-se seus segmentos até sua extremidade livre. Terminada a numeração de um caminho, passa-se à numeração dos outros. Nas células, o fluxo representado pela orientação dos segmentos deve ser no sentido anti-horário, como foi feito na figura 4.2. Dessa forma, exceto o nó livre do primeiro segmento, todos os demais nós livres são nós finais dos segmentos que neles chegam.
- d) Numerar os nós de 1 a  $N_{\text{nós}}$ , sendo  $N_{\text{nós}}$  o número de nós da seção. Como as seções fechadas e mistas recebem um “corte” em cada célula e com isso são consideradas como abertas, para qualquer seção temos que  $N_{\text{nós}} = N_{\text{seg}} + 1$ . Os nós podem ser numerados arbitrariamente, no entanto, para evitar erros na entrada de dados, recomenda-se que sejam numerados seguindo a orientação dos segmentos, sendo nó1 o nó inicial do segmento 1 e os demais nós sendo os nós finais dos segmentos, ou seja: nó2 é o nó final do segmento 1, nó3 é o nó final do segmento 2, e assim

sucessivamente. Assim, nó (n) é o nó final do segmento (n-1), para n de 2 até  $N_{\text{seg}}+1$ .

- e) Numerar as células de 1 a  $N_{\text{cel}}$ , sendo  $N_{\text{cel}}$  o número de células presentes na seção. A ordem da numeração é arbitrária.

Figura 4.1 – Seção mista com cortes hipotéticos.

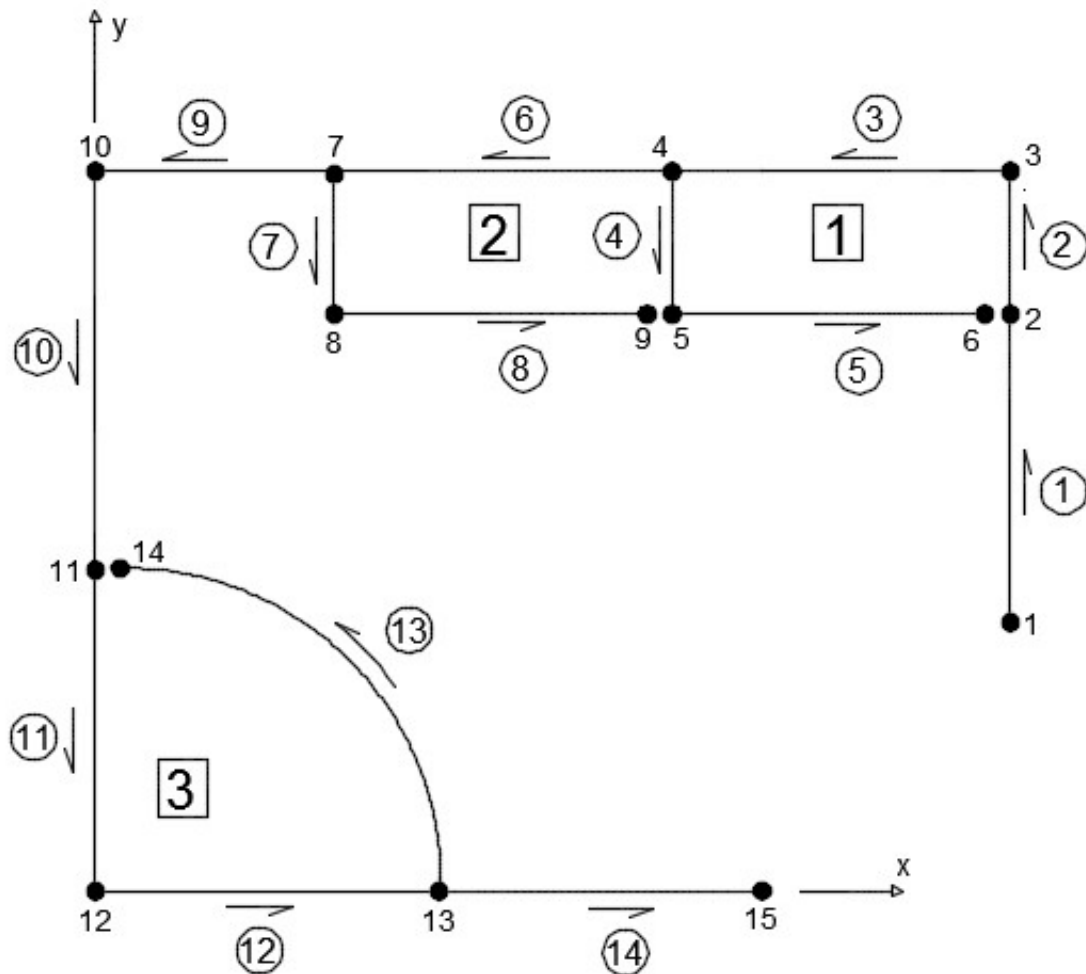


Fonte: Produzido pelo autor

## 4.2. ENTRADA DE DADOS

Para o cálculo da seção, deve-se arbitrar um sistema de coordenadas  $x$  e  $y$  e fornecer os seguintes dados: coordenadas do pólo provisório A, número de segmentos, números dos nós, número de células, coordenadas dos nós, espessura dos segmentos e identificação das células vizinhas a cada segmento. Um exemplo de entrada de dados para a seção exemplo da figura 4.1 é mostrado na figura 4.7.

Figura 4.2 – Croqui da seção exemplo da figura 4.1.



Fonte: Produzido pelo autor

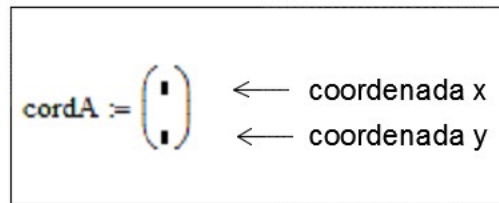
#### 4.2.1. Coordenadas do pólo provisório

As coordenadas do pólo provisório devem ser inseridas no comando “cordA”, cuja matriz 2x1 recebe, no seu primeiro elemento, a coordenada x, e no segundo elemento, a coordenada y, conforme mostrado na figura 4.3.

#### 4.2.2. Número de segmentos e número de células

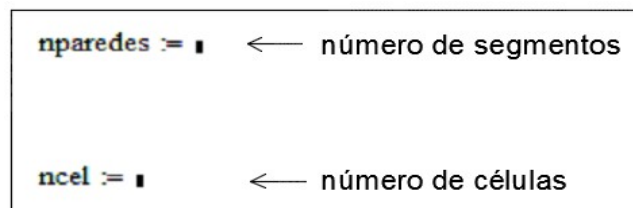
O número de segmentos da seção deve ser inserido no comando “nparedes” e o número de células deve ser inserido no comando “ncel”, conforme mostrado na figura 4.4.

Figura 4.3 –Inserção das coordenadas do pólo provisório A.



Fonte: Produzido pelo autor

Figura 4.4 –Inserção do número de segmentos e células.

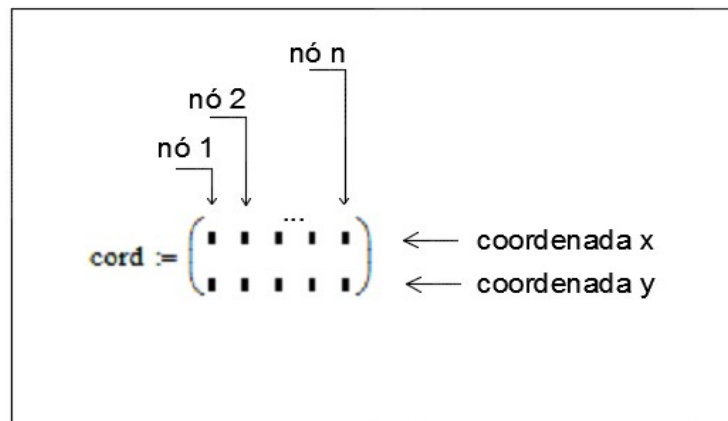


Fonte: Produzido pelo autor

#### 4.2.3. Número dos nós e suas coordenadas

As coordenadas dos nós devem ser inseridas no comando “cord”. Cada coluna corresponde às coordenadas de um determinado nó, sendo a linha 1 referente à coordenada x e a linha 2 referente à coordenada y. Os nós devem ser inseridos de forma crescente, de forma que as coordenadas do nó 1 fiquem na primeira coluna, as do nó 2 na segunda coluna, e assim sucessivamente, conforme mostrado na figura 4.5.

Figura 4.5 –Inserção das coordenadas dos nós.

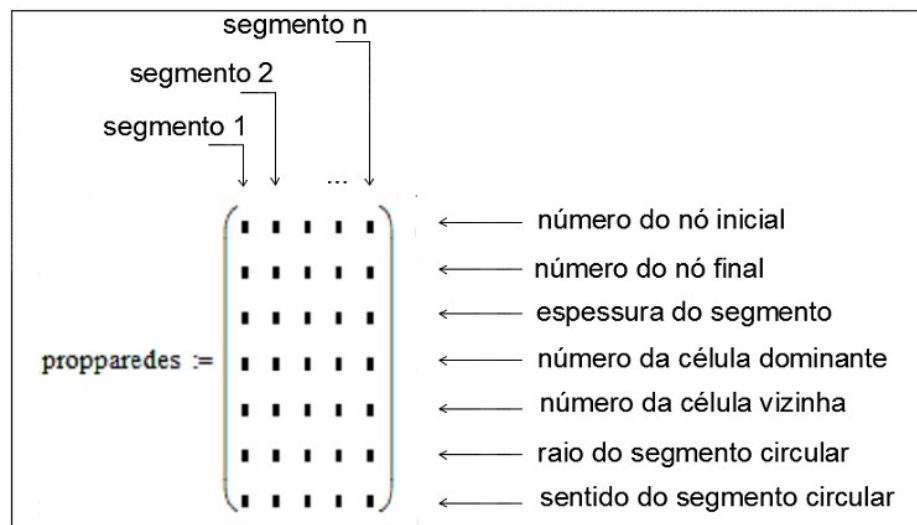


Fonte: Produzido pelo autor

#### 4.2.4. Características dos segmentos

Estas informações são inseridas no comando “propparedes”, cuja matriz é  $7 \times n$ , onde  $n$  é o número de segmentos, conforme mostrado na figura 4.6. A orientação do segmento é definida pelos nós inicial e final que são inseridos na primeira e segunda linha, respectivamente. A espessura é inserida na terceira linha. A quarta e quinta linha são destinadas a receber o número das células dominante e vizinha do segmento, respectivamente, cujas definições são as seguintes: Célula dominante de um segmento é a célula da qual o segmento faz parte e tem orientação no sentido anti-horário em relação ao centro dessa célula. Célula vizinha de um segmento é a célula na qual o segmento faz parte e tem orientação no sentido horário em relação ao centro dessa célula. Para seções com apenas uma célula ou multicelulares em que as células não possuem segmentos em comum, cada célula é a célula dominante dos segmentos que a compõem e estes não possuem células vizinhas.

Figura 4.6 –Inserção das características de cada segmento



Fonte: produzido pelo autor

Se o segmento não fizer parte de nenhuma célula, coloca-se zero na quarta e quinta linha. Se o segmento fizer parte apenas de uma célula, coloca-se o número da célula, a qual será a célula dominante, na quarta linha e zero na quinta linha. Se o segmento for comum a duas células, coloca-se o número da célula dominante e o número da célula vizinha na quarta e quinta linha, respectivamente.

A sexta e sétima linha são destinadas aos segmentos circulares. A sexta linha é destinada ao raio do segmento circular. A sétima linha é referente ao sentido, horário ou anti-

horário, quando se percorre o segmento circular do nó inicial para o final, atribuindo 1 quando o sentido for anti-horário ou -1 quando o sentido for horário.

A figura a seguir apresenta a entrada de dados da seção da figura 4.1 com pólo provisório na origem do sistema.

Figura 4.7 – Entrada de dados para a seção exemplo da figura 4.1.

$$\begin{aligned}
 \text{cordA} &:= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{nparedes} &:= 14 & \text{ncel} &:= 3 \\
 \text{cord} &:= \begin{pmatrix} 26 & 26 & 26 & 16 & 16 & 26 & 6 & 6 & 16 & 0 & 0 & 0 & 9.5 & 0 & 18.5 \\ 7 & 15 & 20 & 20 & 15 & 15 & 20 & 15 & 15 & 20 & 9.5 & 0 & 0 & 9.5 & 0 \end{pmatrix} \\
 \text{propparedes} &:= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 4 & 7 & 8 & 7 & 10 & 11 & 12 & 13 & 13 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 0.90 & 0.90 & 0.90 & 0.90 & 0.90 & 0.90 & 0.90 & 0.90 & 0.90 & 0.90 & 0.90 & 0.90 & 0.90 & 0.90 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

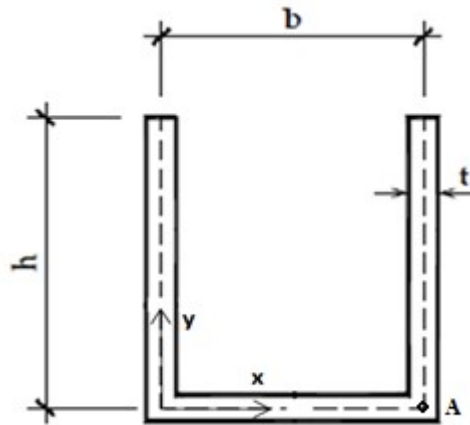
Fonte: Produzido pelo autor.



## 5. EXEMPLOS

Exemplo 1: seção aberta de paredes finas em “U” com espessura constante  $t = 1$  cm e dimensões  $h = b = 10$  cm.

Figura 5.3 - Seção aberta de paredes finas em formato de "u".



Fonte: Adaptado de (MORI; MUNAIAR NETO, 2009, p. 31)

Tabela 5.1 - Propriedades da figura 5.1 calculadas pelo autor e pela referência

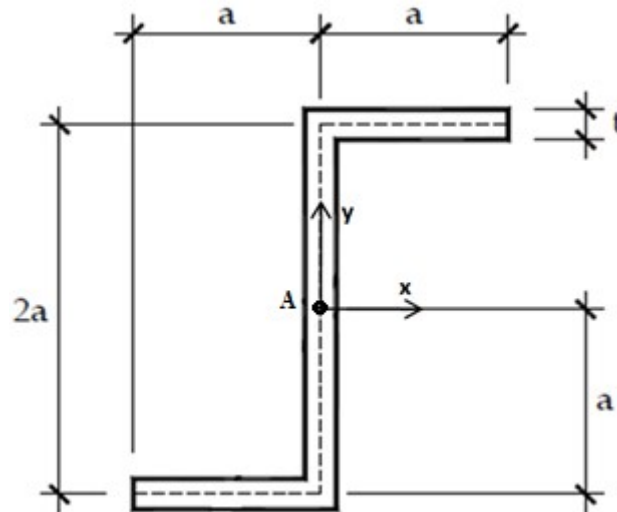
Propriedades	Este Trabalho	(MORI; MUNAIAR NETO, 2009)	Erro (%)
$Q_x$ (cm <sup>3</sup> )	150,00000	-	-
$Q_y$ (cm <sup>3</sup> )	100,00000	-	-
$I_x$ (cm <sup>4</sup> )	$1,33500 \times 10^3$	-	-
$I_y$ (cm <sup>4</sup> )	667,50000	-	-
$I_{xy}$ (cm <sup>4</sup> )	500,00000	-	-
$x_C$ (cm)	5,00000	5	0,00000
$y_C$ (cm)	3,33333	3,33333	0,00000
$Q_{\omega_A}$ (cm <sup>4</sup> )	$2,50000 \times 10^3$	-	-
$I_{x\omega_A}$ (cm <sup>4</sup> )	$1,50000 \times 10^4$	-	-
$I_{y\omega_A}$ (cm <sup>4</sup> )	$6,66667 \times 10^3$	-	-
$I_{\omega_A}$ (cm <sup>6</sup> )	$2,33333 \times 10^5$	-	-
$x_D$ (cm)	5,01247	5	0,24878
$y_D$ (cm)	-4,27350	-4,26401	0,22206
$I_{h_A}$ (cm <sup>4</sup> )	$1,00000 \times 10^3$	-	-
$J$ (cm <sup>4</sup> )	10,00000	10	0,00000
$I_{\omega}$ (cm <sup>6</sup> )	$5,95252 \times 10^3$	$5,95266 \times 10^3$	0,00235189

Fonte: Produzido pelo autor

Neste exemplo, pode-se notar que as propriedades apresentaram boa aproximação quando comparadas com os resultados obtidos por Mori e Munaiar Neto (2009).

Exemplo 2: Seção aberta de paredes finas em formato de “S” com espessura constante de  $t = 1$  cm e dimensões com  $a = 10$  cm, como mostra a figura 5.2.

Figura 5.4 - Seção aberta de paredes finas em formato de "s".



Fonte: Adaptado de (MORI; MUNAIAR NETO, 2009, p. 36)

Tabela 5.2 - Propriedades da figura 5.2 calculadas pelo autor e pela referência

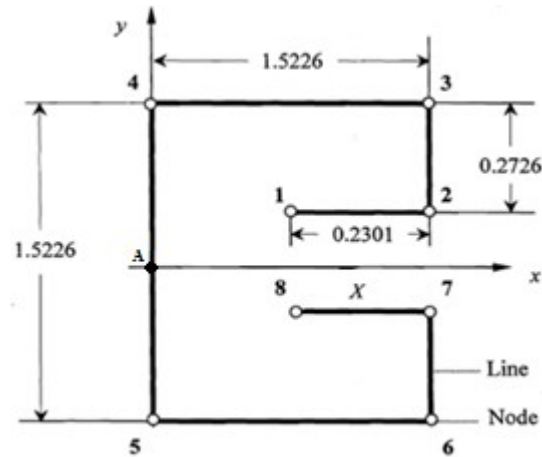
Propriedades	Este Trabalho	(MORI; MUNAIAR NETO, 2009)	Erro (%)
$Q_x$ (cm <sup>3</sup> )	0,00000	-	-
$Q_y$ (cm <sup>3</sup> )	0,00000	-	-
$I_x$ (cm <sup>4</sup> )	668,33333	-	-
$I_y$ (cm <sup>4</sup> )	$2,66833 \times 10^3$	-	-
$I_{xy}$ (cm <sup>4</sup> )	$1,00000 \times 10^3$	-	-
$x_C$ (cm)	0,00000	-	-
$y_C$ (cm)	0,00000	-	-
$Q_{\omega_A}$ (cm <sup>4</sup> )	$3,00000 \times 10^3$	-	-
$I_{x\omega_A}$ (cm <sup>4</sup> )	$-2,27374 \times 10^{-13}$	-	-
$I_{y\omega_A}$ (cm <sup>4</sup> )	0,00000	-	-
$I_{\omega_A}$ (cm <sup>6</sup> )	$2,66667 \times 10^5$	-	-
$x_D$ (cm)	0,00000	-	-
$y_D$ (cm)	0,00000	-	-
$I_{h_A}$ (cm <sup>4</sup> )	$2,00000 \times 10^3$	-	-
$J$ (cm <sup>4</sup> )	13,33333	13,3333	0,00000
$I_{\omega}$ (cm <sup>6</sup> )	$4,16667 \times 10^4$	41666,7	0,00000

Fonte: Produzido pelo autor

Neste exemplo, a constante torcional e a constante de empenamento apresentaram resultados exatamente iguais aos obtidos por Mori e Munaiar Neto (2009).

Exemplo 3 - Seção aberta de paredes finas. Espessura constante igual a  $t = 0,1024$  pol. Dimensões cotadas em polegadas, conforme mostrado na figura 5.3.

Figura 5.3 - Seção aberta de paredes finas.



Fonte: Adaptado de (XIANG; SEABURG; CRAIN; LOU, 2002, p. 608)

Tabela 5.3 - Propriedades da figura 5.3 calculadas pelo autor e pela referência

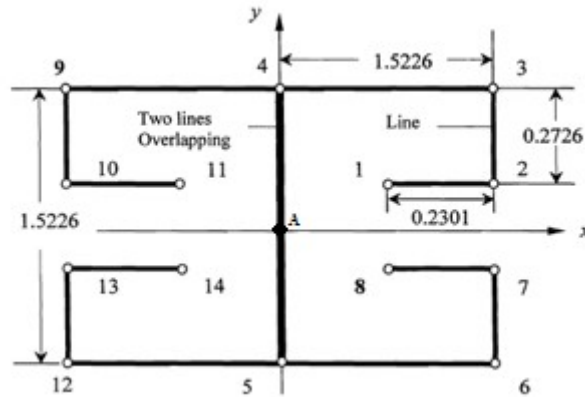
Propriedades	Este Trabalho	(XIANG; SEABURG; CRAIN; LOU, 2002)	Erro (%)
$Q_x$ (pol <sup>3</sup> )	0,38873	-	-
$Q_y$ (pol <sup>3</sup> )	0,00000	-	-
$I_x$ (pol <sup>4</sup> )	0,46416	-	-
$I_y$ (pol <sup>4</sup> )	0,24457	-	-
$I_{xy}$ (pol <sup>4</sup> )	0,00000	-	-
$x_c$ (pol)	0,68115	0,68115	0,00000
$y_c$ (pol)	0,00000	0	0,00000
$Q_{\omega_A}$ (pol <sup>4</sup> )	0,83422	-	-
$I_{x\omega_A}$ (pol <sup>4</sup> )	0,56823	-	-
$I_{y\omega_A}$ (pol <sup>4</sup> )	-0,21971	-	-
$I_{\omega_A}$ (pol <sup>6</sup> )	1,57282	-	-
$x_D$ (pol)	-0,89834	-	-
$y_D$ (pol)	0,00000	-	-
$I_{h_A}$ (pol <sup>4</sup> )	0,32141	-	-
$J$ (pol <sup>4</sup> )	$1,99473 \times 10^{-3}$	0,00199	0,23712
$I_{\omega}$ (pol <sup>6</sup> )	0,15575	0,15575	0,00000

Fonte: Produzido pelo autor

Conforme mostrado na Tabela 5.3, as propriedades disponibilizadas pela referência apresentaram valores iguais aos do programa desenvolvido. O erro apresentado na constante de torção deve-se ao arredondamento das casas decimais.

Exemplo 4: Seção aberta de paredes finas. Refere-se ao exemplo 3 espelhado no eixo y, Dessa forma a espessura da parede central é de  $t = 0,2048$  pol e as demais tem espessura constante igual a  $t = 0,1024$  pol. Dimensões cotadas em polegadas.

Figura 5.4 - Seção aberta de paredes finas.



Fonte: XIANG; SEABURG; CRAIN; LOU (2002, p. 612)

Tabela 5.4 - Propriedades da figura 5.4 calculadas pelo autor e pela referência

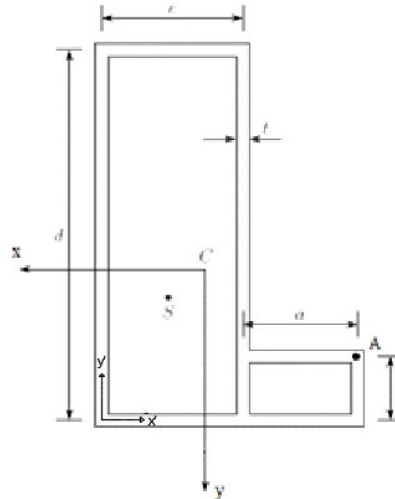
Propriedades	Este Trabalho	(XIANG; SEABURG; CRAIN; LOU, 2002)	Erro (%)
$I_x$ (pol <sup>4</sup> )	0,92913	1,00975	7,98415
$I_y$ (pol <sup>4</sup> )	0,48914	0,50067	2,30291
$I_{xy}$ (pol <sup>4</sup> )	0,00000	0	0,00000
$x_c$ (pol)	0,00000	0	0,00000
$y_c$ (pol)	0,00000	0	0,00000
$Q_{\omega_A}$ (pol <sup>4</sup> )	1,685202	-	-
$I_{x\omega_A}$ (pol <sup>4</sup> )	0,00000	-	-
$I_{y\omega_A}$ (pol <sup>4</sup> )	0,00000	-	-
$I_{\omega_A}$ (pol <sup>6</sup> )	3.14564	-	-
$x_D$ (pol)	0,00000	0	0,00000
$y_D$ (pol)	0,00000	0	0,00000
$I_{h_A}$ (pol <sup>4</sup> )	0.642822	-	-
$J$ (pol <sup>4</sup> )	$7,25921 \times 10^{-3}$	0,00733	0,96575
$I_{\omega}$ (pol <sup>6</sup> )	0,70676	0,76568	7,69512

Fonte: Produzido pelo autor

Neste exemplo, nota-se facilmente uma inconsistência no resultado do  $I_y$  obtido por Xiang et al. (2002). Como esta seção refere-se à seção do exemplo 3 espelhada no eixo y, o valor de  $I_y$  deve ser o dobro do encontrado no exemplo anterior, ou seja,  $I_y = 2 \times 0,24457 = 0,48914$ , resultado encontrado pelo programa aqui desenvolvido. Fazendo-se um cálculo analítico, nota-se que as demais propriedades obtidas a partir do programa estão corretas.

Exemplo 5: Seção fechada multicelular de paredes finas. Dimensões:  $a = 30$  mm;  $b = 20$  mm;  $d = 100$  mm;  $e = 40$  mm;  $t = 0,25$  mm. A origem do sistema está no centroide. As coordenadas do centroide são apresentadas em relação ao sistema de eixos  $x'$  e  $y'$ .

Figura 5.5 - Seção fechada multicelular de paredes finas.



Fonte: (PILKEY; KITIS, 1996, p. 63)

Tabela 5.5 - Propriedades da figura 5.5 calculadas pelo autor e pela referência

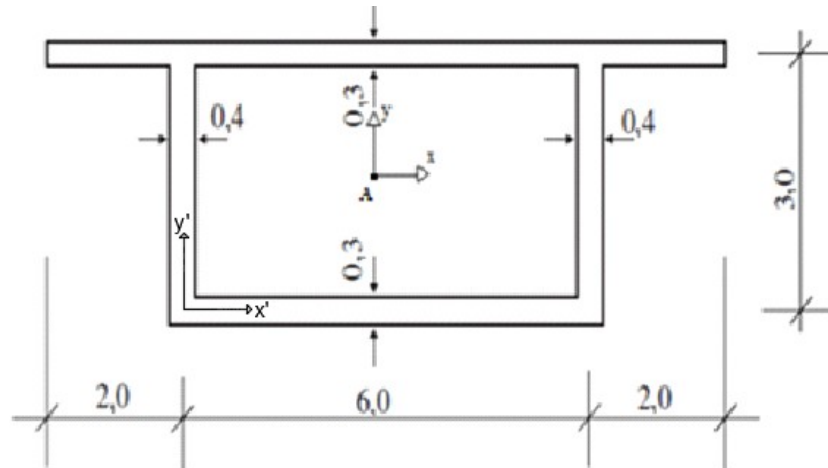
Propriedades	Este Trabalho	(PILKEY; KITIS, 1996)	Erro (%)
$I_x$ (mm <sup>4</sup> )	$4,79933 \times 10^4$	47993	0,00062
$I_y$ (mm <sup>4</sup> )	$1,18222 \times 10^5$	118222	0,00000
$I_{xy}$ (mm <sup>4</sup> )	$-2,41111 \times 10^4$	-24111	0,00041
$x'_c$ (mm)	28,61111	28,61	0,00388
$y'_c$ (mm)	41,11111	41,11	0,00270
$Q_{\omega_A}$ (mm <sup>4</sup> )	$1,29076 \times 10^5$	129076	0,00000
$I_{x\omega_A}$ (mm <sup>4</sup> )	$-5,75148 \times 10^5$	-575148	0,00000
$I_{y\omega_A}$ (mm <sup>4</sup> )	$5,70354 \times 10^6$	5703540	0,00000
$I_{\omega_A}$ (mm <sup>6</sup> )	$4,82161 \times 10^8$	$482,161 \times 10^6$	0,00000
$x_D$ (mm)	9,63963	9,64	0,00384
$y_D$ (mm)	7,45896	7,46	0,01394
$I_{h_A}$ (mm <sup>4</sup> )	$2,16 \times 10^5$	-	-
$J$ (mm <sup>4</sup> )	$6,5111 \times 10^4$	65101	0,01536
$I_{\omega}$ (mm <sup>6</sup> )	$1,38514 \times 10^7$	$13,8514 \times 10^6$	0,00000

Fonte: Produzido pelo autor

Neste exemplo, o sistema de eixos utilizado foi o mesmo adotado por Pilkey e Kitits (1996) para que se pudesse comparar um número maior de propriedades. Grande parte das propriedades apresentaram 0% de erro. As demais apresentaram aproximação satisfatória.

Exemplo 6: Seção mista de paredes finas, semelhante a da figura 1.2 . Unidades em metros com dimensões apresentadas na figura 5.6. Origem do sistema está localizada no centroide. O centroide é apresentado em relação ao sistema de eixos  $x'$  e  $y'$  apresentado na figura 5.6.

Figura 5.6 - Seção mista de paredes finas.



Fonte: Adaptado de (PROKIC; LUKIC, 2007, p. 973)

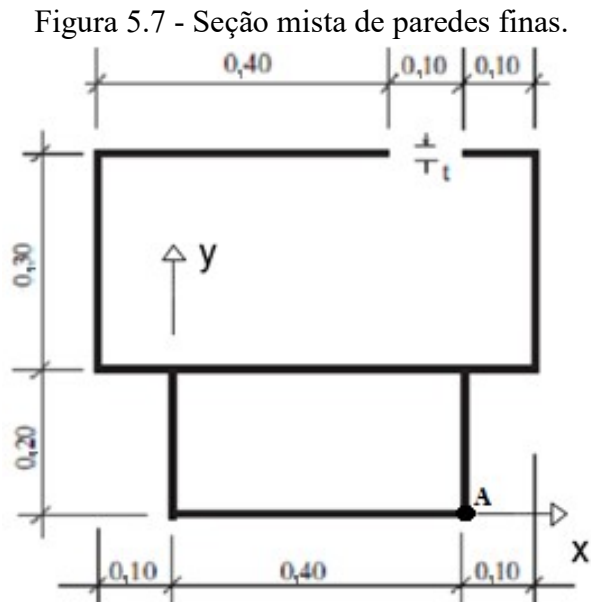
Tabela 5.6 - Propriedades da figura 5.6 calculadas pelo autor e pela referência

Propriedades	Este Trabalho	(PROKIC; LUKIC, 2007)	Erro (%)
$Q_x$ (m <sup>3</sup> )	0,00000	-	-
$Q_y$ (m <sup>3</sup> )	0,00000	-	-
$I_x$ (m <sup>4</sup> )	52,03200	52,0320	0,00000
$I_y$ (m <sup>4</sup> )	12,18600	12,1860	0,00000
$I_{xy}$ (m <sup>4</sup> )	0,00000	-	-
$x'_c$ (m)	3,00000	-	0,00000
$y'_c$ (m)	1,75000	-	0,00000
$Q_{\omega_A}$ (m <sup>4</sup> )	-2,12727	-	-
$I_{x\omega_A}$ (m <sup>4</sup> )	15,01818	-	-
$I_{y\omega_A}$ (m <sup>4</sup> )	$-1,33227 \times 10^{-15}$	-	-
$I_{\omega_A}$ (m <sup>6</sup> )	14,51240	-	-
$x_D$ (m)	0,00000	0	0,00000
$y_D$ (m)	-0,28863	-0,2888	0,05886
$I_{h_A}$ (m <sup>4</sup> )	31,80000	-	-
$J$ (m <sup>4</sup> )	23,59964	23,8356	0,98995
$I_{\omega}$ (m <sup>6</sup> )	9,54647	9,7985	2,57213

Fonte: Produzido pelo autor

Neste exemplo, a constante de empenamento apresentou certa diferença quando comparado ao valor obtido por Prokic e Lukic (2007).

Exemplo 7: Seção mista de paredes finas. Unidades em metros com dimensões apresentadas na figura 5.7. Espessura constante  $t = 0,02$  m.



Fonte: Adaptado de (PROKIC; LUKIC, 2007, p. 975)

Tabela 5.7 - Propriedades da figura 5.7 calculadas pelo autor e pela referência

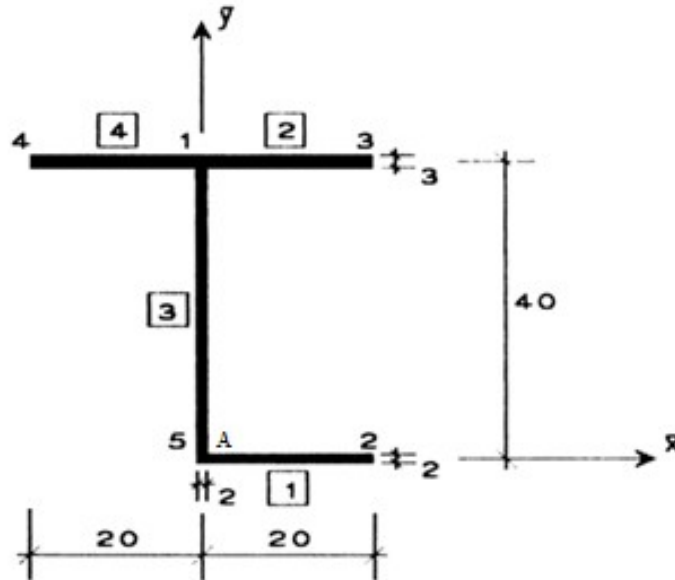
Propriedades	Este Trabalho	(PROKIC; LUKIC, 2007)	Erro (%)
$Q_x$ (m <sup>3</sup> )	$9,70000 \times 10^{-3}$	-	-
$Q_y$ (m <sup>3</sup> )	0,01240	-	-
$I_x$ (m <sup>4</sup> )	$4,06067 \times 10^{-3}$	-	-
$I_y$ (m <sup>4</sup> )	$4,64767 \times 10^{-3}$	-	-
$I_{xy}$ (m <sup>4</sup> )	$2,33000 \times 10^{-3}$	-	-
$x_C$ (m)	0,19400	-	-
$y_C$ (m)	0,24800	-	-
$Q_{\omega_A}$ (m <sup>4</sup> )	$-4,90333 \times 10^{-3}$	-	-
$I_{x\omega_A}$ (m <sup>4</sup> )	$-8,66 \times 10^{-4}$	-	-
$I_{y\omega_A}$ (m <sup>4</sup> )	$-1,805 \times 10^{-3}$	-	-
$I_{\omega_A}$ (m <sup>6</sup> )	$8,84333 \times 10^{-4}$	-	-
$x_D$ (m)	0,02670	-	-
$y_D$ (m)	-0,02617	-	-
$I_{h_A}$ (m <sup>4</sup> )	$5,18000 \times 10^{-3}$	-	-
$J$ (m <sup>4</sup> )	$4,30133 \times 10^{-4}$	0,00043333	0,73777
$I_{\omega}$ (m <sup>6</sup> )	$1,81326 \times 10^{-4}$	0,00018136	0,01875

Fonte: Produzido pelo autor

Neste exemplo, a constante de empenamento e a constante de torção apresentaram boa aproximação em relação aos resultados de Prokic e Lukic (2007).

Exemplo 8: Seção aberta de paredes finas. Unidades em centímetros e dimensões apresentadas na figura 5.8.

Figura 5.8 - Seção aberta de paredes finas.



Fonte: Adaptado de (PROKIC, 1999, p. 114)

Tabela 5.8 - Propriedades da figura 5.8 calculadas pelo autor e pela referência

Propriedades	Este Trabalho	(PROKIC, 1999)	Erro (%)
$Q_x$ (cm <sup>3</sup> )	400	-	-
$Q_y$ (cm <sup>3</sup> )	6,40000x10 <sup>3</sup>	-	-
$I_x$ (cm <sup>4</sup> )	2,13600x10 <sup>4</sup>	2,13600x10 <sup>4</sup>	0,00000
$I_y$ (cm <sup>4</sup> )	2,34770x10 <sup>5</sup>	2,34770x10 <sup>5</sup>	0,00000
$I_{xy}$ (cm <sup>4</sup> )	0,00000	0,000000	0,00000
$x_C$ (cm)	1,66667	0,16667x10	0,00189
$y_C$ (cm)	26,66667	0,26667x10 <sup>2</sup>	0,00124
$Q_{\omega_A}$ (cm <sup>4</sup> )	0,00000	-	-
$I_{x\omega_A}$ (cm <sup>4</sup> )	-6,40000x10 <sup>5</sup>	-	-
$I_{y\omega_A}$ (cm <sup>4</sup> )	0,00000	-	-
$I_{\omega_A}$ (cm <sup>6</sup> )	2,56000x10 <sup>7</sup>	-	-
$x_D$ (cm)	-5,62915	-0,56316x10	0,04350
$y_D$ (cm)	33,84764	0,33856x10 <sup>2</sup>	0,02469
$I_{h_A}$ (cm <sup>4</sup> )	1,920000x10 <sup>5</sup>	-	-
$J$ (cm <sup>4</sup> )	520,00000	0,520000x10 <sup>3</sup>	0,00000
$I_{\omega}$ (cm <sup>6</sup> )	3,94914x10 <sup>6</sup>	0,394255x10 <sup>7</sup>	0,16687

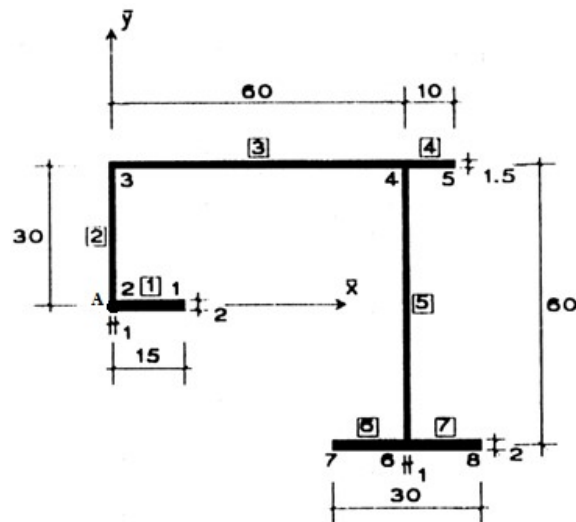
Fonte: Produzido pelo autor

Neste exemplo, as propriedades comparadas com os valores obtidos por Prokic (1999) apresentaram boa aproximação.



Exemplo 9: Seção aberta de paredes finas. Unidades em centímetros e dimensões apresentadas na figura 5.9.

Figura 5.9 - Seção aberta de paredes finas.



Fonte: Adaptado de (PROKIC, 1999, p. 111)

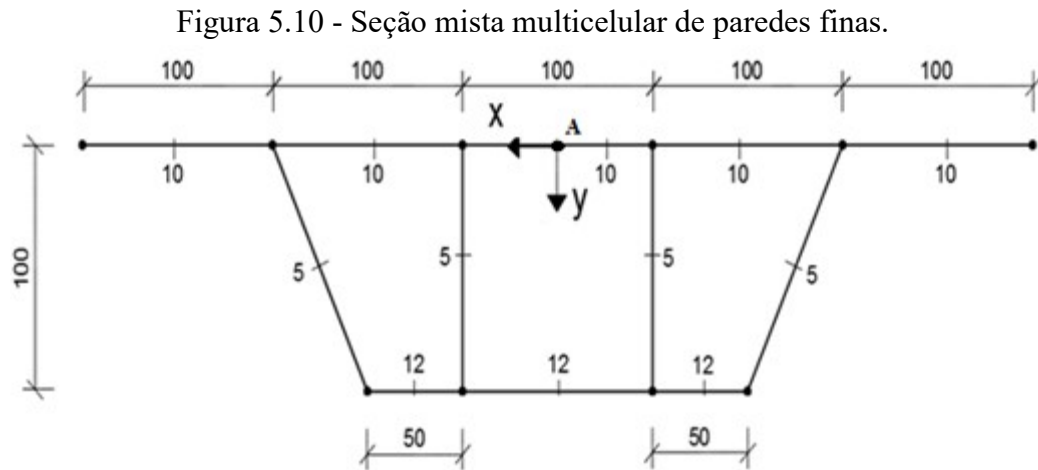
Tabela 5.9 - Propriedades da figura 5.9 calculadas pelo autor e pela referência

Propriedades	Este Trabalho	(PROKIC, 1999)	Erro (%)
$Q_x$ (cm <sup>3</sup> )	1,11000x10 <sup>4</sup>	-	-
$Q_y$ (cm <sup>3</sup> )	1,80000x10 <sup>3</sup>	-	-
$I_x$ (cm <sup>4</sup> )	6,10257x10 <sup>5</sup>	0,610257x10 <sup>6</sup>	0,00000
$I_y$ (cm <sup>4</sup> )	1,75550x10 <sup>5</sup>	0,17555x10 <sup>6</sup>	0,00000
$I_{xy}$ (cm <sup>4</sup> )	2,25000x10 <sup>3</sup>	0,225000x10 <sup>4</sup>	0,00000
$x_C$ (cm)	38,94737	0,38947x10 <sup>2</sup>	0,00095
$y_C$ (cm)	6,31579	0,63158x10	0,00016
$Q_{\omega_A}$ (cm <sup>4</sup> )	-6,50250x10 <sup>5</sup>	-	-
$I_{x\omega_A}$ (cm <sup>4</sup> )	-3,74100x10 <sup>7</sup>	-	-
$I_{y\omega_A}$ (cm <sup>4</sup> )	7,49250x10 <sup>6</sup>	-	-
$I_{\omega_A}$ (cm <sup>6</sup> )	2,75040x10 <sup>9</sup>	-	-
$x_D$ (cm)	50,54829	0,50562x10 <sup>2</sup>	0,02712
$y_D$ (cm)	48,63675	0,48632x10 <sup>2</sup>	0,00977
$I_{h_A}$ (cm <sup>4</sup> )	3,64500x10 <sup>5</sup>	-	-
$J$ (cm <sup>4</sup> )	228,75000	0,228750x10 <sup>3</sup>	0,00000
$I_{\omega}$ (cm <sup>6</sup> )	9,27269x10 <sup>7</sup>	0,926333x10 <sup>8</sup>	0,10094

Fonte: Produzido pelo autor

Neste exemplo, as propriedades apresentaram boa aproximação quando comparadas com os valores obtidos por Prokic (1999).

Exemplo 10: Seção mista multicelular de paredes finas. Unidades em milímetros e dimensões apresentadas na figura 5.10.



Fonte: Adaptado de (PILKEY; KITIS, 1996, p. 69)

Tabela 5.10 - Propriedades da figura 5.10 calculadas pelo autor e pela referência.

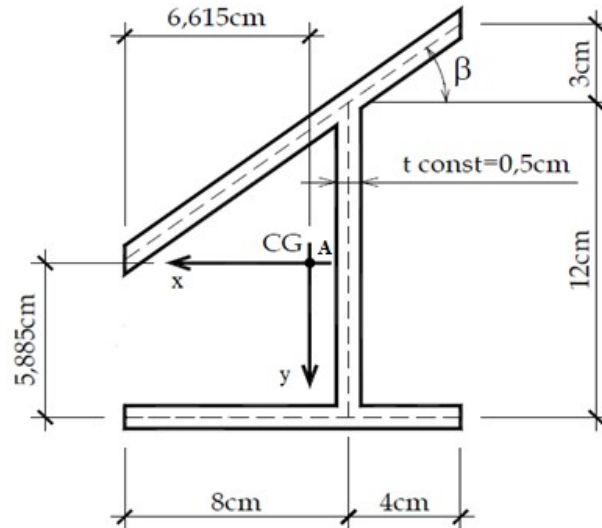
Propriedades	Este Trabalho	(PILKEY; KITIS, 1996)	Erro (%)
$Q_x$ (cm <sup>3</sup> )	0,00000	-	-
$Q_y$ (cm <sup>3</sup> )	$3,45902 \times 10^5$	-	-
$I_x$ (cm <sup>4</sup> )	$1,32373 \times 10^8$	-	-
$I_y$ (cm <sup>4</sup> )	$3,11310 \times 10^7$	-	-
$I_{xy}$ (cm <sup>4</sup> )	0,00000	-	-
$x_C$ (cm)	0,00000	0	0,00000
$y_C$ (cm)	36,34172	36,34	0,00473
$Q_{\omega_A}$ (cm <sup>4</sup> )	$-8,15687 \times 10^7$	-	-
$I_{x\omega_A}$ (cm <sup>4</sup> )	$-6,25365 \times 10^9$	-	-
$I_{y\omega_A}$ (cm <sup>4</sup> )	$-2,96435 \times 10^9$	-	-
$I_{\omega_A}$ (cm <sup>6</sup> )	$1,0049 \times 10^{12}$	-	-
$x_D$ (cm)	0,00000	0	0,00000
$y_D$ (cm)	47,24272	47,24	0,00576
$I_{h_A}$ (cm <sup>4</sup> )	$4,66246 \times 10^7$	-	-
$J$ (cm <sup>4</sup> )	$2,83071 \times 10^7$	$29,17 \times 10^6$	2,95818
$I_{\omega}$ (cm <sup>6</sup> )	$1,04123 \times 10^{10}$	$10,41 \times 10^9$	0,02209

Fonte: Produzido pelo autor

Neste exemplo, a constante de torção apresentou uma certa diferença quando comparada com o valor obtido por Pilkey e Kitis (1996). As demais propriedades apresentaram boa aproximação.

Exemplo 11: Seção aberta de paredes finas em formato “I” com trecho inclinado. Unidades em centímetros e dimensões apresentadas na figura 5.11.

Figura 5.11 – Seção aberta de paredes finas em formato de “I” assimétrico



Fonte: (MORI; MUNAIAR NETO, 2009, p. 42)

Tabela 5.11 - Propriedades da figura 5.11 calculadas pelo autor e pela referência.

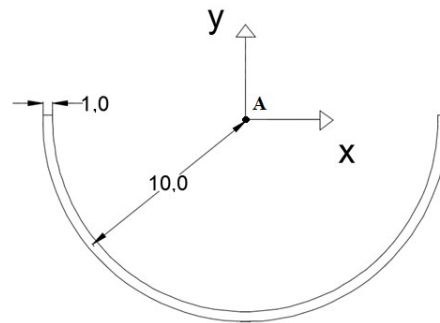
Propriedades	Este Trabalho	(MORI; MUNAIAR NETO, 2009)	Erro (%)
$Q_x$ (cm <sup>3</sup> )	$-9,00000 \times 10^{-5}$	-	-
$Q_y$ (cm <sup>3</sup> )	$9,00000 \times 10^{-5}$	-	-
$I_x$ (cm <sup>4</sup> )	178,79663	178,62	0,09879
$I_y$ (cm <sup>4</sup> )	490,46538	490,24	0,04595
$I_{xy}$ (cm <sup>4</sup> )	68,80962	68,88	0,10218
$x_C$ (cm)	0,00000	0	0,00000
$y_C$ (cm)	0,00000	0	0,00000
$Q_{\omega_A}$ (cm <sup>4</sup> )	$1,09800 \times 10^3$	-	-
$I_{x\omega_A}$ (cm <sup>4</sup> )	44,30148	-	-
$I_{y\omega_A}$ (cm <sup>4</sup> )	$-1,10492 \times 10^3$	-	-
$I_{\omega_A}$ (cm <sup>6</sup> )	$7,17351 \times 10^4$	-	-
$x_D$ (cm)	-2,41814	-2,422	0,15937
$y_D$ (cm)	-1,17842	-1,182	0,30288
$I_{h_A}$ (cm <sup>4</sup> )	342,99587	-	-
$J$ (cm <sup>4</sup> )	1,62500	-	-
$I_{\omega}$ (cm <sup>6</sup> )	$7,18510 \times 10^3$	-	-

Fonte: Produzido pelo autor

Neste exemplo, as propriedades apresentaram boa aproximação quando comparadas com os valores obtidos por Mori e Munaiar Neto (2009).

Exemplo 12: Seção aberta de paredes finas em formato de “U” com segmentos curvos. Timoshenko e Gere (1961) forneceram expressões para o cálculo da constante de empenamento e de torção para segmento circular de paredes finas. Valores foram adotados para comparar os resultados. Dimensões em centímetros apresentadas na figura 5.12

Figura 5.12 – Seção aberta em formato de “U” com segmentos curvos.



Fonte: Produzido pelo autor

Tabela 5.12 - Propriedades da figura 5.12 calculadas pelo autor.

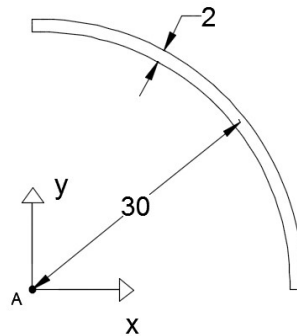
Propriedades	Este Trabalho	(TIMOSHENKO; GERE, 1961)	Erro (%)
$Q_x$ (cm <sup>3</sup> )	0,00000	-	-
$Q_y$ (cm <sup>3</sup> )	-200,00000	-	-
$I_x$ (cm <sup>4</sup> )	1,57080x10 <sup>3</sup>	-	-
$I_y$ (cm <sup>4</sup> )	1,57080x10 <sup>3</sup>	-	-
$I_{xy}$ (cm <sup>4</sup> )	0,00000	-	-
$x_C$ (cm)	0,00000	-	-
$y_C$ (cm)	-6,36620	-	-
$Q_{\omega_A}$ (cm <sup>4</sup> )	4,93480x10 <sup>3</sup>	-	-
$I_{x\omega_A}$ (cm <sup>4</sup> )	2,00000x10 <sup>4</sup>	-	-
$I_{y\omega_A}$ (cm <sup>4</sup> )	3,14159x10 <sup>4</sup>	-	-
$I_{\omega_A}$ (cm <sup>6</sup> )	1,03354x10 <sup>6</sup>	-	-
$x_D$ (cm)	0,00000	-	-
$y_D$ (cm)	-12,73240	-	-
$I_{h_A}$ (cm <sup>4</sup> )	3,14159x10 <sup>3</sup>	-	-
$J$ (cm <sup>4</sup> )	10,47198	10,47198	0,00000
$I_{\omega}$ (cm <sup>6</sup> )	3,73773x10 <sup>3</sup>	3,73773x10 <sup>3</sup>	0,00000

Fonte: Produzido pelo autor

Neste exemplo, os valores obtidos pelo programa para a constante de empenamento e de torção foram exatamente iguais aos valores obtidos por Timoshenko e Gere (1961).

Exemplo 13: Seção aberta de paredes finas em formato de um quarto de círculo com segmentos curvos. Timoshenko e Gere (1961) forneceram expressões para o cálculo da constante de empenamento e de torção para um segmento circular de paredes finas. Valores foram adotados para comparar os resultados. Dimensões em centímetros apresentadas na figura 5.12

Figura 5.13 – Seção aberta em formato de “U” com segmentos curvos.



Fonte: Produzido pelo autor

Tabela 5.13 - Propriedades da figura 5.13 calculadas pelo autor.

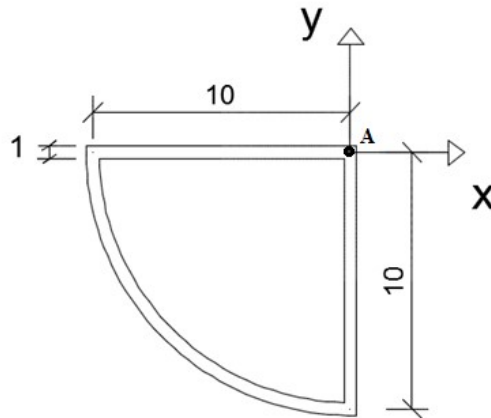
Propriedades	Este Trabalho	(TIMOSHENKO; GERE, 1961)	Erro (%)
$Q_x$ (cm <sup>3</sup> )	$1,80000 \times 10^3$	-	-
$Q_y$ (cm <sup>3</sup> )	$1,80000 \times 10^3$	-	-
$I_x$ (cm <sup>4</sup> )	$4,24115 \times 10^4$	-	-
$I_y$ (cm <sup>4</sup> )	$4,24115 \times 10^4$	-	-
$I_{xy}$ (cm <sup>4</sup> )	$2,70000 \times 10^4$	-	-
$x_C$ (cm)	19,09859	-	-
$y_C$ (cm)	19,09859	-	-
$Q_{\omega_A}$ (cm <sup>4</sup> )	$-6,66198 \times 10^4$	-	-
$I_{x\omega_A}$ (cm <sup>4</sup> )	$-1,62000 \times 10^6$	-	-
$I_{y\omega_A}$ (cm <sup>4</sup> )	$-9,24690 \times 10^5$	-	-
$I_{\omega_A}$ (cm <sup>6</sup> )	$6,27877 \times 10^7$	-	-
$x_D$ (cm)	22,55815	-	-
$y_D$ (cm)	22,55815	-	-
$I_{h_A}$ (cm <sup>4</sup> )	$8,48230 \times 10^4$	-	-
$J$ (cm <sup>4</sup> )	125,66371	125,66371	0,00000
$I_{\omega}$ (cm <sup>6</sup> )	$1,20201 \times 10^4$	12020,1	0,00000

Fonte: Produzido pelo autor

Neste exemplo, os valores obtidos pelo programa para a constante de empenamento e de torção foram exatamente iguais aos valores obtidos por Timoshenko e Gere (1961).

Exemplo 14: Seção fechada de parede finas com espessura constante, composta por um trecho circular de 90° e dois trechos retos. Dimensões em centímetros.

Figura 5.14 – Seção fechada com trechos circular e reto



Fonte: Produzido pelo autor

Tabela 5.14 - Propriedades da figura 5.14 calculadas pelo autor.

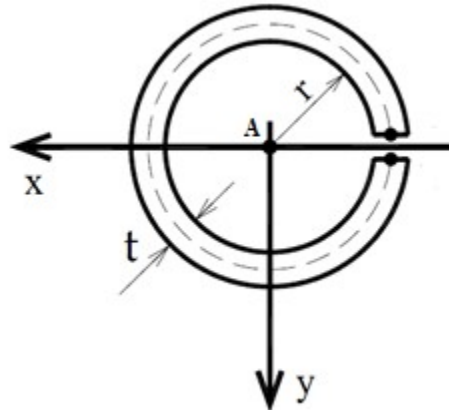
Propriedades	Este Trabalho
$Q_x$ (cm <sup>3</sup> )	-150,00000
$Q_y$ (cm <sup>3</sup> )	-150,00000
$I_x$ (cm <sup>4</sup> )	1,11956x10 <sup>3</sup>
$I_y$ (cm <sup>4</sup> )	1,11956x10 <sup>3</sup>
$I_{xy}$ (cm <sup>4</sup> )	500,00000
$x_C$ (cm)	-4,20074
$y_C$ (cm)	-4,20074
$Q_{\omega_A}$ (cm <sup>4</sup> )	1,57080x10 <sup>3</sup>
$I_{x\omega_A}$ (cm <sup>4</sup> )	-3,93019x10 <sup>3</sup>
$I_{y\omega_A}$ (cm <sup>4</sup> )	-9,2668310 <sup>3</sup>
$I_{\omega_A}$ (cm <sup>6</sup> )	9,21326x10 <sup>4</sup>
$x_D$ (cm)	-4,30676
$y_D$ (cm)	-4,30676
$I_{h_A}$ (cm <sup>4</sup> )	1,57080x10 <sup>3</sup>
$J$ (cm <sup>4</sup> )	690,99463
$I_{\omega}$ (cm <sup>6</sup> )	49,51452

Fonte: Produzido pelo autor

Embora não existam dados que possam ser comparados, convém notar a consistência dos resultados simétricos dos momentos estáticos, momentos de inércia, coordenadas do centroide e coordenadas do centro de torção.

Exemplo 15: Neste exemplo, Mori e Munaiar Neto (2009) apresentaram o cálculo analítico para algumas propriedades. Valores para as dimensões foram adotados para comparar os resultados. Seção circular aberta de paredes finas. Adota-se  $r = 10$  cm e  $t = 1$  cm.

Figura 5.15 – Seção circular aberta



Fonte: (MORI; MUNAIAR NETO, 2009, p. 64)

Tabela 5.15 - Propriedades da figura 5.15 calculadas pelo autor e pela referência.

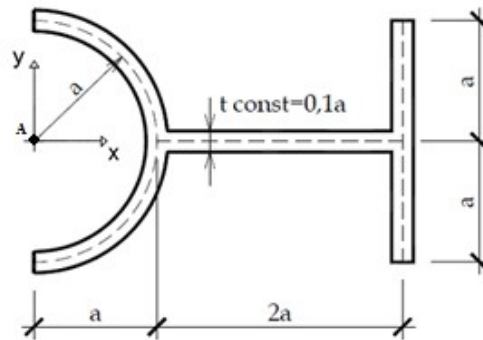
Propriedades	Este Trabalho	(MORI; MUNAIAR NETO, 2009)	Erro (%)
$Q_x$ (cm <sup>3</sup> )	0,00000	-	-
$Q_y$ (cm <sup>3</sup> )	0,00000	-	-
$I_x$ (cm <sup>4</sup> )	$3,14159 \times 10^3$	$3,14159 \times 10^3$	0,00000
$I_y$ (cm <sup>4</sup> )	$3,14159 \times 10^3$	$3,14159 \times 10^3$	0,00000
$I_{xy}$ (cm <sup>4</sup> )	0,00000	0,00000	0,00000
$x_C$ (cm)	0,00000	0,00000	0,00000
$y_C$ (cm)	0,00000	0,00000	0,00000
$Q_{\omega_A}$ (cm <sup>4</sup> )	$1,97392 \times 10^4$	-	-
$I_{x\omega_A}$ (cm <sup>4</sup> )	0,00000	-	-
$I_{y\omega_A}$ (cm <sup>4</sup> )	$6,28319 \times 10^4$	-	-
$I_{\omega_A}$ (cm <sup>6</sup> )	$8,26834 \times 10^6$	-	-
$x_D$ (cm)	20,00000	20,00000	0,00000
$y_D$ (cm)	0,00000	0,00000	0,00000
$I_{h_A}$ (cm <sup>4</sup> )	$6,28319 \times 10^3$	-	-
$J$ (cm <sup>4</sup> )	20,94395	20,94395	0,00000
$I_{\omega}$ (cm <sup>6</sup> )	$8,10448 \times 10^5$	-	-

Fonte: Produzido pelo autor

Neste exemplo, os valores das propriedades obtidas pelo programa foram exatamente iguais aos valores da referência.

Exemplo 16: Neste exemplo, Mori e Munaiar Neto (2009) apresentaram o cálculo analítico para algumas propriedades. Valores para as dimensões foram adotados para comparar os resultados. Seção aberta de paredes finas composta por segmentos retos e curvos. Adota-se  $a = 10 \text{ cm}$ .

Figura 5.16 – Seção aberta com segmentos curvos e retos



Fonte: MORI; MUNAIAR NETO (2009, p. 67)

Tabela 5.16 - Propriedades da figura 5.16 calculadas pelo autor e pela referência.

Propriedades	Este Trabalho	(MORI; MUNAIAR NETO, 2009)	Erro (%)
$Q_x \text{ (cm}^3\text{)}$	$1,20000 \times 10^3$	-	-
$Q_y \text{ (cm}^3\text{)}$	0,00000	-	-
$I_x \text{ (cm}^4\text{)}$	$2,82391 \times 10^4$	-	-
$I_y \text{ (cm}^4\text{)}$	$2,23913 \times 10^3$	-	-
$I_{xy} \text{ (cm}^4\text{)}$	0,00000	-	-
$x_C \text{ (cm)}$	16,80297	16,8	0,01768
$y_C \text{ (cm)}$	0,00000	0,00	0,00000
$Q_{\omega_A} \text{ (cm}^4\text{)}$	$-1,12180 \times 10^4$	-	-
$I_{x\omega_A} \text{ (cm}^4\text{)}$	$-1,88496 \times 10^5$	-	-
$I_{y\omega_A} \text{ (cm}^4\text{)}$	$4,00000 \times 10^4$	$4 \times 10^4$	0,00000
$I_{\omega_A} \text{ (cm}^6\text{)}$	$2,62050 \times 10^6$	-	-
$x_D \text{ (cm)}$	17,86408	17,86	0,02284
$y_D \text{ (cm)}$	0,00000	0,00	0,00000
$I_{h_A} \text{ (cm}^4\text{)}$	$1,48584 \times 10^4$	-	-
$J \text{ (cm}^4\text{)}$	23,80531	24	0,81121
$I_{\omega} \text{ (cm}^6\text{)}$	$1,4382 \times 10^5$	-	-

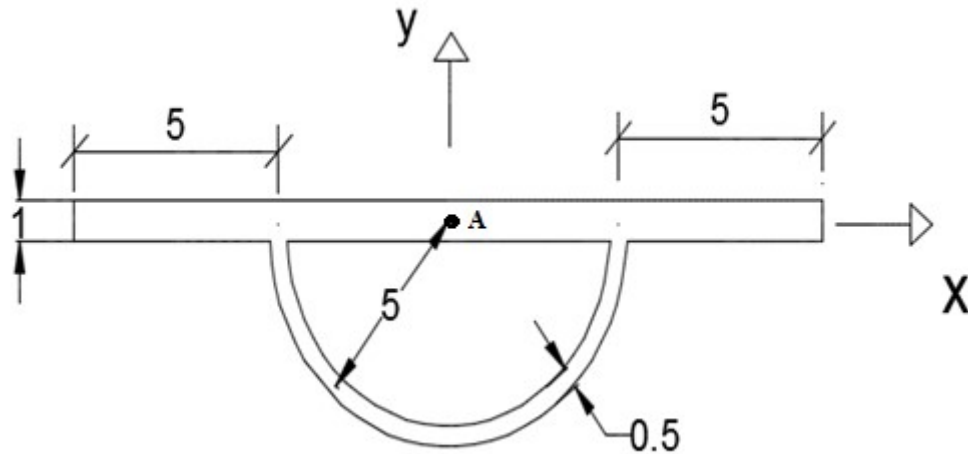
Fonte: Produzido pelo autor

Os erros apresentados nesse exemplo foram devido a arredondamentos feitos por Mori e Munaiar Neto (2009) no cálculo analítico. Fazendo-se o cálculo simples, nota-se que  $J = 23,80531 \text{ cm}^4$ .



Exemplo 17: Seção mista com segmentos curvos e retos com espessura variável. Dimensões em centímetros.

Figura 5.17 – Seção mista com segmentos curvos e retos.



Fonte: Produzido pelo autor

Tabela 5.17 - Propriedades da figura 5.17 calculadas pelo autor.

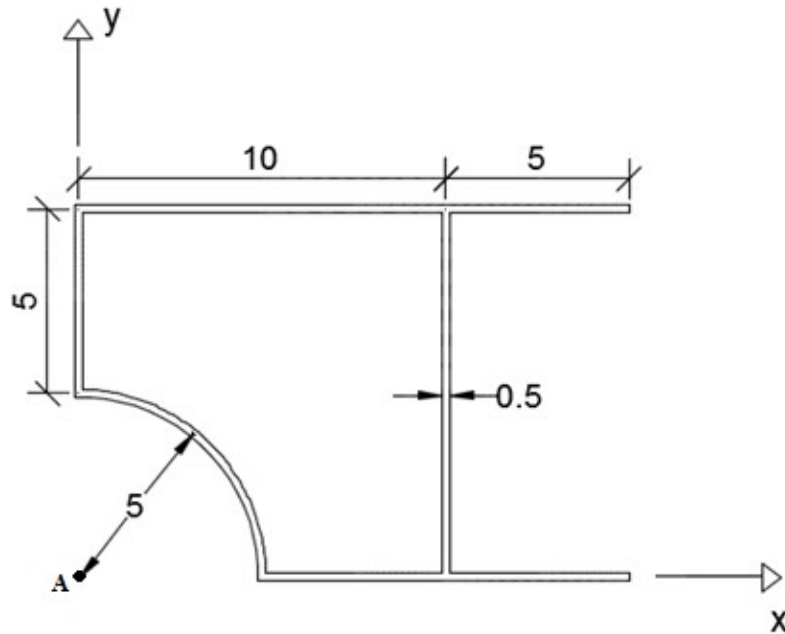
Propriedades	Este Trabalho
$Q_x$ (cm <sup>3</sup> )	0,00000
$Q_y$ (cm <sup>3</sup> )	-25,00000
$I_x$ (cm <sup>4</sup> )	764,84144
$I_y$ (cm <sup>4</sup> )	99,84144
$I_{xy}$ (cm <sup>4</sup> )	0,00000
$x_C$ (cm)	0,00000
$y_C$ (cm)	-0,89754
$Q_{\omega_A}$ (cm <sup>4</sup> )	264,10693
$I_{x\omega_A}$ (cm <sup>4</sup> )	1,02008x10 <sup>3</sup>
$I_{y\omega_A}$ (cm <sup>4</sup> )	-237,04594
$I_{\omega_A}$ (cm <sup>6</sup> )	3,93833x10 <sup>3</sup>
$x_D$ (cm)	0,00000
$y_D$ (cm)	-1,33371
$I_{h_A}$ (cm <sup>4</sup> )	196,34954
$J$ (cm <sup>4</sup> )	152,27369
$I_{\omega}$ (cm <sup>6</sup> )	73,62176

Fonte: Produzido pelo autor

Embora não existam dados que possam ser comparados, convém notar a consistência dos resultados nulos de  $Q_x$ ,  $I_{xy}$ ,  $x_C$ ,  $x_D$ , devido a  $y$  ser um eixo de simetria.

Exemplo 18: Seção mista com segmentos curvos e retos com espessura constante. Dimensões em centímetros.

Figura 5.18 – Seção mista com segmentos curvos e retos



Fonte: Produzido pelo autor

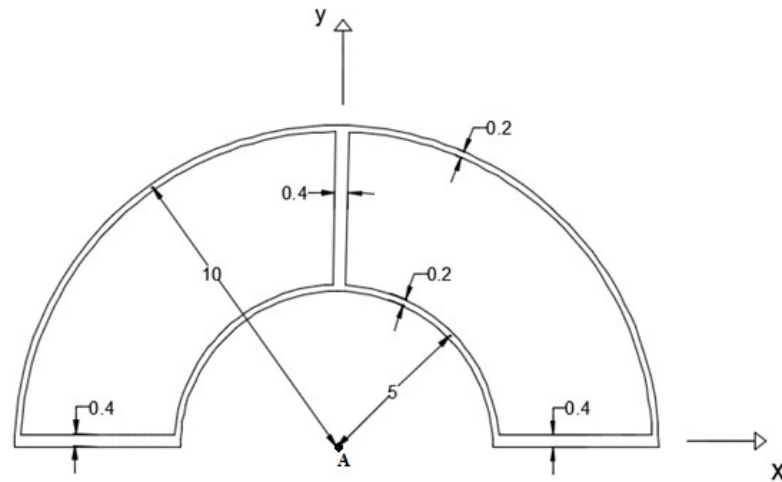
Tabela 5.18 - Propriedades da figura 5.18 calculadas pelo autor.

Propriedades	Este Trabalho
$Q_x$ (cm <sup>3</sup> )	67,50000
$Q_y$ (cm <sup>3</sup> )	52,50000
$I_x$ (cm <sup>4</sup> )	661,31162
$I_y$ (cm <sup>4</sup> )	444,65162
$I_{xy}$ (cm <sup>4</sup> )	337,50000
$x_C$ (cm)	7,05270
$y_C$ (cm)	5,48544
$Q_{\omega_A}$ (cm <sup>4</sup> )	-430,04715
$I_{x\omega_A}$ (cm <sup>4</sup> )	-4,29743x10 <sup>3</sup>
$I_{y\omega_A}$ (cm <sup>4</sup> )	-1,36225x10 <sup>3</sup>
$I_{\omega_A}$ (cm <sup>6</sup> )	3,23393x10 <sup>4</sup>
$x_D$ (cm)	5,12425
$y_D$ (cm)	5,91903
$I_{h_A}$ (cm <sup>4</sup> )	539,26991
$J$ (cm <sup>4</sup> )	136,52043
$I_{\omega}$ (cm <sup>6</sup> )	424,10342

Fonte: Produzido pelo autor

Exemplo 19: Seção multicelular com trechos retos e curvos com espessura variável. Dimensões em centímetros.

Figura 5.19 – Seção multicelular com trechos retos e curvos



Fonte: Produzido pelo autor

Tabela 5.19 - Propriedades da figura 5.19 calculadas pelo autor.

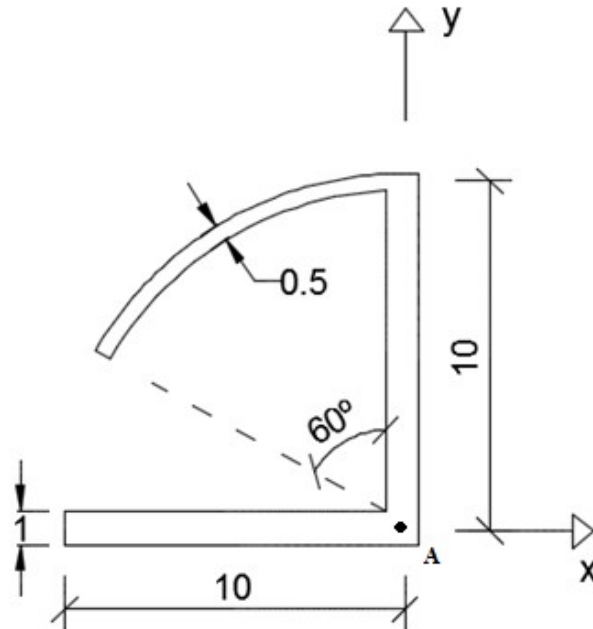
Propriedades	Este Trabalho
$Q_x$ (cm <sup>3</sup> )	0,00000
$Q_y$ (cm <sup>3</sup> )	65,00000
$I_x$ (cm <sup>4</sup> )	586,78917
$I_y$ (cm <sup>4</sup> )	470,14917
$I_{xy}$ (cm <sup>4</sup> )	0,00000
$x_C$ (cm)	0,00000
$y_C$ (cm)	4,21400
$Q_{\omega_A}$ (cm <sup>4</sup> )	$1,32767 \times 10^3$
$I_{x\omega_A}$ (cm <sup>4</sup> )	$-5,09940 \times 10^3$
$I_{y\omega_A}$ (cm <sup>4</sup> )	$5,59480 \times 10^3$
$I_{\omega_A}$ (cm <sup>6</sup> )	$1,61563 \times 10^5$
$x_D$ (cm)	0,00000
$y_D$ (cm)	8,69035
$I_{h_A}$ (cm <sup>4</sup> )	706,85835
$J$ (cm <sup>4</sup> )	213,01758
$I_{\omega}$ (cm <sup>6</sup> )	$2,97019 \times 10^3$

Fonte: Produzido pelo autor

Embora não existam dados que possam ser comparados, convém notar a consistência dos resultados nulos de  $Q_x$ ,  $I_{xy}$ ,  $x_C$ ,  $x_D$ , devido a  $y$  ser um eixo de simetria.

Exemplo 20: Seção aberta com trechos retos e curvos com espessura variável. Dimensões em centímetros.

Figura 5.20 – Seção aberta com segmentos retos e curvos



Fonte: Produzido pelo autor

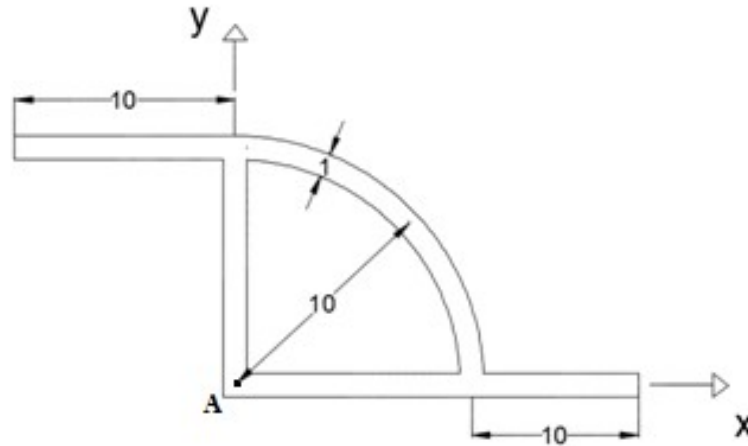
Tabela 5.20 - Propriedades da figura 5.20 calculadas pelo autor.

Propriedades	Este Trabalho
$Q_x$ (cm <sup>3</sup> )	-75,00044
$Q_y$ (cm <sup>3</sup> )	93,30139
$I_x$ (cm <sup>4</sup> )	487,71690
$I_y$ (cm <sup>4</sup> )	704,21980
$I_{xy}$ (cm <sup>4</sup> )	-187,50299
$x_C$ (cm)	-2,97196
$y_C$ (cm)	3,69715
$Q_{\omega_A}$ (cm <sup>4</sup> )	274,15869
$I_{x\omega_A}$ (cm <sup>4</sup> )	-1,71217x10 <sup>3</sup>
$I_{y\omega_A}$ (cm <sup>4</sup> )	2,03451x10 <sup>3</sup>
$I_{\omega_A}$ (cm <sup>6</sup> )	1,91400x10 <sup>4</sup>
$x_D$ (cm)	4,02993
$y_D$ (cm)	4,75499
$I_{h_A}$ (cm <sup>4</sup> )	523,60337
$J$ (cm <sup>4</sup> )	7,103
$I_{\omega}$ (cm <sup>6</sup> )	7,78038x10 <sup>3</sup>

Fonte: Produzido pelo autor

Exemplo 21: Neste exemplo, o segmento curvo foi subdividido em 5, 10, 15 e 20 segmentos retos, de forma que se pudesse observar a convergência desses resultados para os resultados exatos obtidos com o segmento curvo. Dimensões em centímetros.

Figura 5.21 – Seção multicelular com trechos retos e curvos.



Fonte: Produzido pelo autor

Tabela 5.21 - Propriedades da figura 5.21 calculadas pelo autor.

Propriedades	Número de segmentos retos representando o segmento curvo				Com segmento curvo
	5	10	15	20	
$Q_x$ (cm <sup>3</sup> )	246,59667	248,73772	249,29918	249,54099	250,00000
$Q_y$ (cm <sup>3</sup> )	248,42701	249,56363	249,79493	249,89496	250,00000
$I_x$ (cm <sup>4</sup> )	3,73632x10 <sup>3</sup>	3,76729x10 <sup>3</sup>	3,77583x10 <sup>3</sup>	3,77955x10 <sup>3</sup>	3,78623x10 <sup>3</sup>
$I_y$ (cm <sup>4</sup> )	2,10831x10 <sup>3</sup>	2,11851x10 <sup>3</sup>	2,12039x10 <sup>3</sup>	2,12088x10 <sup>3</sup>	2,12123x10 <sup>3</sup>
$I_{xy}$ (cm <sup>4</sup> )	-19,32561	-5,32531	-2,33485	-1,22667	0,00000
$x_C$ (cm)	4,43714	4,46877	4,47715	4,48040	4,48769
$y_C$ (cm)	4,47008	4,48361	4,48605	4,48675	4,48769
$Q_{\omega_A}$ (cm <sup>4</sup> )	2,85882x10 <sup>3</sup>	2,91667x10 <sup>3</sup>	2,93175x10 <sup>3</sup>	2,93785x10 <sup>3</sup>	2,95060x10 <sup>3</sup>
$I_{x\omega_A}$ (cm <sup>4</sup> )	-3,96511x10 <sup>3</sup>	-3,87019x10 <sup>3</sup>	-3,84182x10 <sup>3</sup>	-3,82563x10 <sup>3</sup>	-3,80215x10 <sup>3</sup>
$I_{y\omega_A}$ (cm <sup>4</sup> )	2,23745x10 <sup>4</sup>	2,28181x10 <sup>4</sup>	2,29300x10 <sup>4</sup>	2,29732x10 <sup>4</sup>	2,30648x10 <sup>4</sup>
$I_{\omega_A}$ (cm <sup>6</sup> )	2,76931x10 <sup>5</sup>	2,85798x10 <sup>5</sup>	2,88074x10 <sup>5</sup>	2,88906x10 <sup>5</sup>	2,90851x10 <sup>5</sup>
$x_D$ (cm)	4,84432	4,95170	4,98213	4,99853	5,02315
$y_D$ (cm)	4,24526	4,27579	4,28029	4,27792	4,28176
$I_{h_A}$ (cm <sup>4</sup> )	2,48122x10 <sup>3</sup>	2,53868x10 <sup>3</sup>	2,55324x10 <sup>3</sup>	2,55766x10 <sup>3</sup>	2,57080x10 <sup>3</sup>
$J$ (cm <sup>4</sup> )	654,84426	682,33323	689,29040	691,57427	697,66130
$I_{\omega}$ (cm <sup>6</sup> )	1,27053x10 <sup>4</sup>	1,24509x10 <sup>4</sup>	1,23727x10 <sup>4</sup>	1,23214x10 <sup>4</sup>	1,22504x10 <sup>4</sup>

Fonte: Produzido pelo autor

No exemplo 21, pode-se observar a convergência dos resultados quando o segmento curvo é discretizado em segmentos retos. Observa-se ainda que o produto de inércia e a constante de torção apresentam grande variação à medida que se aumenta o número de segmentos retos, isto é, estas propriedades só apresentam resultados satisfatórios quando o número de segmentos retos é elevado. Assim, convém notar a contribuição deste trabalho, já que não necessita da discretização dos segmentos curvos.

## 6. CONCLUSÃO

O Processo numérico computacional desenvolvido neste trabalho possibilitou o cálculo direto das propriedades geométricas necessárias à análise da flexo torção em estruturas com seções compostas por paredes finas, a partir de um sistema de eixos arbitrário, sem a necessidade de transferir os sistema de eixos para o centroide, economizando, assim, uma etapa no processo numérico computacional, quando comparado aos trabalhos já desenvolvidos. Os exemplos resolvidos apresentaram resultados satisfatórios quando comparados aos resultados encontrados na literatura. A partir do exemplo 21 do capítulo 5, pôde-se verificar a convergência dos resultados para o cálculo proposto de segmentos curvos.

Sugestões para pesquisas futuras:

- a) Desenvolver o cálculo para seções com segmentos curvos com o pólo provisório em um ponto qualquer da seção, possibilitando a utilização de seções com segmentos curvos de centros de curvatura distintos.
- b) Introduzir o algoritmo Depth-First-Search, ou desenvolver um semelhante, para automatizar a identificação e aplicação dos cortes fictícios nas seções fechadas, otimizando o programa e reduzindo uma etapa na entrada de dados.

## 7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALFANO, Giulio; MAROTTI DE SCIARRA, Francesco; ROSATI, Luca. Automatic analysis of multicell thin-walled sections. **Computers and Structures**, v.59, n. 4, p. 641-655, 1996.

BENSCOTER, S. U. A theory of torsion bending for multicell beams. **Journal of Applied Mechanics**. v. 21, p. 25-34, 1954.

EDLUND, Stefan. **Thin-walled cross sections. Theory and computer implementation**. 1997. 70f. Licenciante Dissertation. Royal Institute of Technology. Stockholm, Sweden.

HIBBELER, R.C. **Estática: Mecânica para Engenheiros**. Edição: 12ª. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2011.

HU, Thomas S. Z. **Cross sectional constants and stress distributions of thin-walled sections**. Technical Memorandum 92/209. Defence Research Establishment, Canada. Mar. 1992.

MORI, Dagoberto Dario; MUNAIAR NETO, Jorge. **Flexo-Torção: Barras com seção aberta e paredes delgadas, Teorias e Exemplos**. 1ª Edição. São Carlos: EESC-USP, 2009.

PIFFER, Vinicius S. **Ponte Rio-Niterói**. [ecivilufes.wordpress.com](http://ecivilufes.wordpress.com). 06/06/2011. Disponível em: <<https://ecivilufes.wordpress.com/page/6/>> Acessado em: 27/05/2017.

PILKEY, Walter; KITIS, Levent. Notes on the Linear Analysis of Thin-walled Beams. University of Virginia. Department of Mechanical Engineering. Charlottesville, Virginia. 1996.

PROKIĆ, Aleksandar. Computer program for determination of geometrical properties of thin-walled beams with open profile. **Advances in Engineering Software**, v. 30, p. 109-119, 1999.

PROKIĆ, Aleksandar. Computer program for determination of geometrical properties of thin-walled beams with open-closed section. **Computers and Structures**, v. 74, p. 705-715, 2000.



PROKIĆ, Aleksandar; LUKIĆ, Dragan. Dynamic analysis of thin-walled closed-section beams. **Journal of Sound and Vibration**, v. 302, p. 962-980, 2007.

PROKIĆ, Aleksandar; On triply coupled vibrations of thin-walled beams with arbitrary cross-section. **Journal of Sound and Vibration**, v. 279, p. 723-737, 2005.

Viga de aço para construção. Disponível em: <<http://www.metalfas.com.br/vigas-aco-construcao-preco>> Acessado em: 27/05/2017.

TIMOSHENKO, S. P.; GERE, J. M. **"Theory of Elastic Stability"**, McGraw-Hill, New York, second edition 1961.

VLASOV, V. Z.; **Thin-Walled Elastic Beams**, Israel Program for Scientific Translations Ltd, 1<sup>o</sup> edition, 1961.

XIANG, Chunting; SEABURG, Paul A.; CRAIN, Robert; LOU, Albert C. J. On the computation of the cross-section properties of Arbitrary thin-walled structures. In: INTERNATIONAL SPECIALTY CONFERENCE ON COLD-FORMED STEEL STRUCTURES, n. 1, 2002. Orlando, Florida USA.